Relaciones de recurrencia

Prof. Enrique Vílchez Quesada

Universidad Nacional de Costa Rica

Introducción

Las relaciones de recurrencia son sucesiones de números reales enlazados a partir de una ecuación recursiva. De allí, que toda relación de recurrencia es una recursividad, aunque como se estudió en el capítulo anterior, no toda recursividad corresponde a una relación de recurrencia.

Esta clase de recursividad tiene la importancia de permitir con frecuencia, la resolución de distintos tipos de problemas, consideremos el siguiente ejemplo:

Example

Suponga que una persona posee una deuda en una entidad bancaria. Si no paga el monto del préstamo al final de cada mes, la entidad le cobra un interés de un 5 % sobre el monto adeudado. Si se asume un préstamo de *US* \$300 dólares, ¿cuánto dinero deberá al cabo de un año si no ha pagado ninguna de las cuotas?

Solución

El valor adeudado al cabo de n meses lo representaremos como a_n. Se observa que $a_0 = 300$, además, $a_n = a_{n-1} + 0{,}05 \cdot a_{n-1} = 1{,}05 \cdot a_{n-1}$, dado que el monto a deber en el mes n corresponde a lo que se adeuda en el mes anterior $n-1$, más el $5\,\%$ de intereses. Por otra parte, para responder a la pregunta del problema: ¿cuánto dinero deberá al cabo de un año si no ha pagado ninguna de las cuotas?, se debe encontrar el resultado de a_{12}, a través de la ecuación que hemos construido:

$$a_n = 1{,}05 \cdot a_{n-1} \text{ con } a_0 = 300$$

Solución

En *Wolfram Mathematica*:

In[ ] :=

```
a[n_] := 1.05 a[n - 1]
a[0] = 300;
a[12]
```

Out[ ] =

538.757

Es decir, después de un año sin pagar nada al banco, la persona tendrá una deuda acumulada de *US* \$538,757

Nota

Se ha utilizado el software *Mathematica* para evaluar a_{12} puesto que el procedimiento manual devengaría un recorrido muy laborioso hacia atrás, de trece sustituciones. Se aclara al lector que no se ha eleborado un programa mediante el uso de un `If` como se hizo en el capítulo 1, a razón de dar un tratamiento al tema, con un enfoque matemático y no recursivo, aunque desde luego, esto también permitiría obtener el valor de a_{12}. En *Wolfram Language* una recursividad de cola viable en ese sentido, sería:

In[ ] :=

```
Deuda[n_, deuda_ : 300]:=If[n == 0, deuda,
Deuda[n - 1, 1.05 deuda]]
Deuda[12]
```

Nota

Se obtiene la siguiente salida:
Out[ ] $=$

538.757
En adelante no se empleará ningún programa recursivo en los procedimientos de resolución, pero queda claro al alumno que su utilización es una alternativa correcta.

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Recurrencia/File-22.zip

- En este ejercicio a la ecuación $a_n = 1{,}05 \cdot a_{n-1}$ sujeta a $a_0 = 300$, se le denomina relación de recurrencia y a a_0 condición inicial. Una ecuación es una relación de recurrencia cuando define una sucesión de números reales, donde el término $n-$ésimo, a_n, se expresa a partir de alguno de sus elementos anteriores: a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0. La finalidad, por lo tanto, de cualquier relación de recurrencia es representar una sucesión numérica.

Definition (2.1)

Sea dada una sucesión de números reales a_0, a_1, a_2, a_3, ... Una relación de recurrencia sobre los elementos de la sucesión es una ecuación que relaciona el término a_n con alguno de sus antecesores a_0, a_1, ..., a_{n-1}.

- La ecuación que determina una relación de recurrencia debe estar sujeta a un conjunto de condiciones iniciales, pues de lo contrario, no habrían casos raíz y como consecuencia de ello, la proposición recursiva no convergería a ninguna solución.

Nota

Como el alumno irá comprobando poco a poco en la práctica, el número de condiciones iniciales de una relación de recurrencia es igual al número de términos anteriores a n que definen la ecuación recursiva. Dicho valor se llama "orden" de la relación de recurrencia.

- En el ejemplo anterior, donde $a_n = 1{,}05 \cdot a_{n-1}$ se observa que a_n depende únicamente de a_{n-1}, por lo tanto, la relación de recurrencia es de orden uno y por consiguiente, basta con una única condición inicial $a_0 = 300$, para encontrar cada uno de los elementos de la sucesión que representa.
- Si recordamos la relación de recurrencia que genera los números de *Fibonacci*, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ con $a_1 = a_2 = 1$, en ella existen dos condiciones iniciales, en vista de que a_n está en función de dos elementos anteriores: a_{n-1} y a_{n-2}, es decir, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ es una relación de recurrencia de orden dos.

- En general, por lo tanto, si una relación de recurrencia es de orden dos debe estar sujeta a dos condiciones iniciales, si depende de tres términos anteriores a n (orden tres), debe poseer tres condiciones iniciales, si está en función de cuatro términos anteriores (orden cuatro), integrará en su definición cuatro condiciones iniciales y así sucesivamente.

Nota

Claro está, las relaciones de recurrencia en términos informáticos podrían ocasionar un alto costo computacional en tiempo de ejecución. De allí la necesidad de estudiar en este capítulo, métodos que permitan resolver una relación de recurrencia.

Antes de ello, enunciaremos algunos ejemplos orientados a la evaluación y construcción de relaciones de recurrencia.

Example (2.1)

Considere la relación de recurrencia $a_n = 2a_{n-1} - 3a_{n-2}$ con $a_0 = 1$ y $a_1 = 4$. Determine manualmente los elementos a_2, a_3, a_4 y a_5. Halle con *Wolfram Mathematica* los términos de la sucesión para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, 30$.

Solución

Iniciamos encontrando el elemento a_2. Con este objetivo se toma la ecuación recursiva $a_n = 2a_{n-1} - 3a_{n-2}$ y se reemplaza la n por 2 :

$a_2 = 2a_{2-1} - 3a_{2-2} = 2a_1 - 3a_0$

Por la condiciones iniciales $a_0 = 1$ y $a_1 = 4$:

$a_2 = 2a_1 - 3a_0 = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5$

De manera análoga, teniendo a_2 podemos ahora calcular a_3 :

$a_3 = 2a_2 - 3a_1 = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = -2$

Como $a_4 = 2a_3 - 3a_2$, se concluye que:

$a_4 = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 5 = -19$

Ahora, con relación a a_5 :

$a_5 = 2a_4 - 3a_3 = 2 \cdot (-19) - 3 \cdot (-2) = -38 + 6 = -32$

Solución

Podríamos continuar hasta llegar a obtener el valor de a_{30}, sin embargo, este rutinario proceso *Mathematica* lo realiza de manera directa, por medio del comando del paquete **VilCretas** llamado `RT`, veamos:

In[ ] :=

```
RT[{2, -3}, {1, 4}, 31, inicio -> 0]
```

Out[ ] =

{1, 4, 5, -2, -19, -32, -7, 82, 185, 124, -307, -986, -1051, 856, 4865, 7162, -271, -22028, -43243, -20402, 88925, 239056, 211337, -294494, -1222999, -1562516, 543965, 5775478, 9919061, 2511688, -24733807}

Nota

En la instrucción `RT` el primer argumento corresponde a un vector que contiene los coeficientes de a_{n-1} y a_{n-2}, en ese orden, es decir, hay que respetar un orden descendente. El segundo parámetro es un vector donde se transcriben las condiciones iniciales en orden ascendente. El tercer valor representa la cantidad de elementos a evaluar en la relación de recurrencia. Como en este ejercicio se desea variar n desde 0 hasta 30, en ese rango hay 31 términos y por ese motivo, se le ha pasado a `RT` dicho número. Finalmente, la opción "`inicio -> 0`" indica a *Wolfram Mathematica* que las condiciones iniciales comienzan en 0. Por defecto, el comando `RT` asume un "`inicio`" en 1, por lo que únicamente bajo esa circunstancia se puede prescindir de la opción.

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Recurrencia/File-23.zip

Explicación en video

https://youtu.be/gLuGweOhlSA

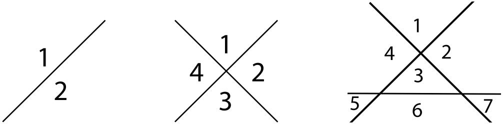
- Otros tipos de ejercicios de interés, consisten en abordar ejemplos donde el objetivo resida en construir una relación de recurrencia que represente la solución de un problema. Veamos.

Example (2.2)

Si se tienen n líneas rectas que dividen a un plano π, sea a_n el número de regiones en las cuales el plano es dividido. Se sabe que las rectas se cortan dos a dos en un único punto. Halle una relación de recurrencia para a_n y determine el número de regiones en las que quedaría dividido π con $n = 7$.

Solución

En la siguiente figura se muestra el número de regiones a_n trazadas a “mano alzada”, con $n = 1, 2, 3$:



Por lo tanto:

n	a_n
1	$a_1 = 2$, este es el caso raíz
2	$a_2 = 4 = a_1 + 2$
3	$a_3 = 7 = a_2 + 3$

Solución

Una animación que muestra la cantidad de regiones en las que queda divido el plano π con $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ está disponible mediante la sentencia `CDFNRegions` del paquete **VilCretas**:

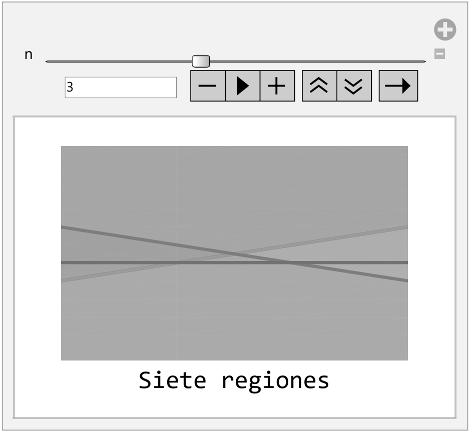
In[ ] :=

```
CDFNRegions[]
```

Solución

Se obtiene la siguiente salida:

Out[ ] $=$



Solución

Al mover el deslizador "n" se visualiza lo que ocurre en cada caso. Además, la siguiente descarga ofrece el mismo objeto dinámico.

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/CDFs/Numero_de_regiones_en_un_plano.cdf.zip

Solución

Al observar estos resultados se intuye que $a_n = a_{n-1} + n$ con la condición inicial $a_1 = 2\ \forall n,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. De acuerdo con ello, en *Wolfram Mathematica* a_7 se puede calcular así:

In[ ] :=

```
a[n_] := a[n - 1] + n
a[1] = 2;
a[7]
```

Out[ ] =

29

Solución

También, este valor se podría obtiener mediante el software empleando de forma anidada las instrucciones `RT` y `Last`:

In[ ] :=

```
Last[RT[{1, n}, {2}, 7]]
```

Out[ ] =

29

Nota

`Last` retorna el último elemento de la lista generada por `RT`, que consiste precisamente en a_7 al evaluar siete términos de la sucesión comenzando en uno. Se aprecia en el primer vector de coeficientes pasado a `RT`, cómo la n que se le suma a a_{n-1} en la ecuación recursiva, se coloca al lado derecho del coeficiente 1, separado por una coma, esto es lo que se conoce con el nombre de "parte no homogénea" de una relación de recurrencia. Es decir, si en una relación de recurrencia a los términos anteriores a a_n (a_0, a_1, ..., a_{n-1}), se les está sumando/restando alguna fórmula adicional que no depende de ellos, se dice que la relación de recurrencia es no homogénea y en el comando `RT`, esa parte, se coloca al final del primer vector separado por una coma.

Solución

Se concluye que el plano π queda dividido en 29 regiones al utilizar 7 rectas que se cortan dos a dos en un único punto.

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Recurrencia/File-24.zip

Example (2.3)

Considere la siguiente sucesión de números reales:

$$S = \{-1, 2, 7, 14, 23, \ldots\}$$

Encuentre una relación de recurrencia para S y represéntela en el plano cartesiano.

Solución

Por la lista dada, se observa que:

n	S
1	$a_1 = -1$
2	$a_2 = 2 = a_1 + 3 = a_1 + 2 \cdot 2 - 1$
3	$a_3 = 7 = a_2 + 5 = a_2 + 2 \cdot 3 - 1$
4	$a_4 = 14 = a_3 + 7 = a_3 + 2 \cdot 4 - 1$
5	$a_5 = 23 = a_4 + 9 = a_4 + 2 \cdot 5 - 1$

De acuerdo con estos resultados $a_n = a_{n-1} + (2n - 1)$ sujeta a $a_1 = -1$. En la tabla anterior, con toda libertad se pudo haber iniciado en un valor de n cualesquiera, no necesariamente igual a 1.

Solución

Por ejemplo, si se hubiera asumido $a_0 = -1$, el estudiante debe notar que la fórmula $2n - 1$ en la ecuación recursiva, deja de funcionar, teniendo que recurrir a la expresión $2n + 1$:

n	S
0	$a_0 = -1$
1	$a_1 = 2 = a_0 + 3 = a_0 + 2 \cdot 1 + 1$
2	$a_2 = 7 = a_1 + 5 = a_1 + 2 \cdot 2 + 1$
3	$a_3 = 14 = a_2 + 7 = a_2 + 2 \cdot 3 + 1$
4	$a_4 = 23 = a_3 + 9 = a_3 + 2 \cdot 4 + 1$

Solución

En otras palabras, la relación de recurrencia correspondería en ese caso a $a_n = a_{n-1} + (2n+1)$ sujeta a $a_0 = -1$. De manera análoga, si se hubiese pensado en iniciar en 2 tomando a $a_2 = -1$, se observa que:

n	S
2	$a_2 = -1$
3	$a_3 = 2 = a_2 + 3 = a_2 + 2 \cdot 3 - 3$
4	$a_4 = 7 = a_3 + 5 = a_3 + 2 \cdot 8 - 3$
5	$a_5 = 14 = a_4 + 7 = a_4 + 2 \cdot 5 - 3$
6	$a_6 = 23 = a_5 + 9 = a_5 + 2 \cdot 6 - 3$

Por consiguiente, $a_n = a_{n-1} + (2n-3)$ con $a_2 = -1$. Y así sucesivamente, se pudo en este ejemplo, comenzar con cualquier otro valor entero positivo en la condición inicial.

Nota

En general, se insta al estudiante a analizar, cómo si se considera $a_k = -1$ con $k \in \mathbb{N}$, la ecuación recursiva corresponde a:

$$a_n = a_{n-1} + (2n - (2k - 1)) = a_{n-1} + 2n - 2k + 1$$

Solución

Con la intención de graficar $a_n = a_{n-1} + (2n-1)$ sujeta a $a_1 = -1$ (nuestra primera opción de respuesta), se puede utilizar el comando del paquete **VilCretas** denominado `GraficaRRL`. La instrucción permite graficar relaciones de recurrencia lineales como ocurre en este ejemplo. La "`RRL`" al final del nombre del comando es un acrónimo cuyo significado es "relación de recurrencia lineal". La recursividad $a_n = a_{n-1} + (2n-1)$ se considera lineal, dado que a_{n-1} está elevado a una potencia igual uno. En general, una relación de recurrencia lineal es aquella donde todos los términos anteriores a a_n (a_0, a_1, ..., a_{n-1}) en la ecuación recursiva, están elevados a la uno. Por ejemplo, $a_n = (a_{n-1})^2 + (2n-1)$ es una relación de recurrencia cuadrática y no lineal.

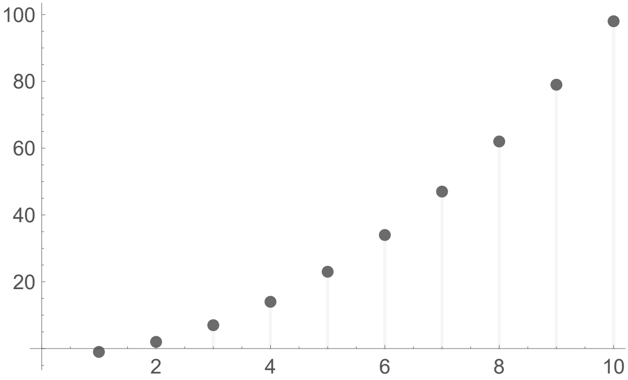
Solución

`GraficaRRL` recibe como argumentos los mismos vectores que emplea la instrucción `RT`, en este ejemplo para $a_n = a_{n-1} + (2n - 1)$ con $a_1 = -1$, se tendría:

In[ ] :=

```
GraficaRRL[{1, 2 n - 1}, {-1}]
```

Se obtiene la siguiente salida:
Out[ ] =



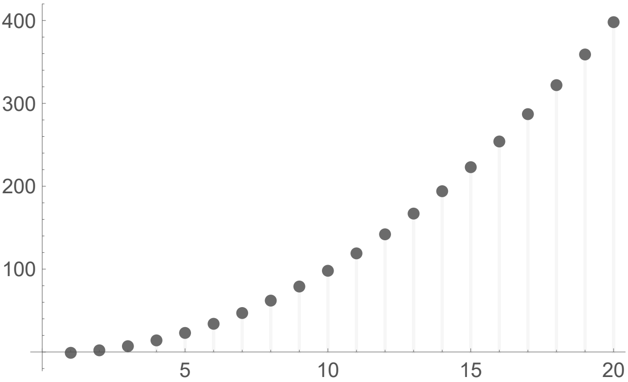
Solución

La instrucción `GraficaRRL` goza de las opciones "`inicio`" y "`npuntos`". La primera se usa si las condiciones iniciales comienzan en un valor distinto de 1 y la segunda si se desea graficar más o menos de diez puntos en el plano cartesiano. La siguiente línea de código, por ejemplo, grafica la relación de recurrencia con 20 puntos:

In[ ] :=

```
GraficaRRL[{1, 2 n - 1}, {-1}, npuntos -> 20]
```

Se obtiene la siguiente gráfica:
Out[ ] $=$



Uso del comando GraficaRRL

Explicación en video

https://youtu.be/aroerSVBFao

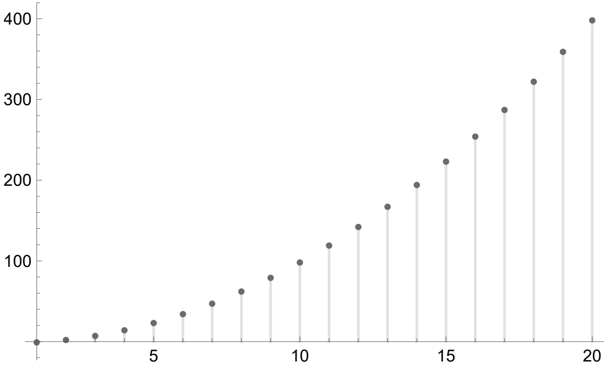
Otro comando en *Wolfram Mathematica* que permite crear la gráfica de una relación de recurrencia se denomina `DiscretePlot`. Esta instrucción representa cualquier tipo de relación de recurrencia (no necesariamente lineal) en un intervalo especificado por el usuario. En este ejemplo se procedería para su uso, así:

In[ ] :=

```
a[n_] := a[n - 1] + 2n-1
a[1] = -1;
DiscretePlot[a[n], {n, 1, 20}]
```

Se obtiene la siguiente salida:

Out[ ] =



Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Recurrencia/File-25.zip

Example (2.4)

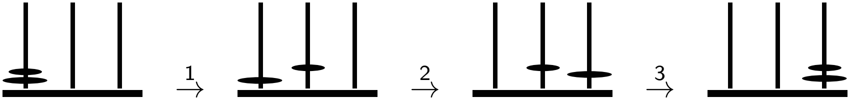
Las torres de *Hanoi* es un juego de ingenio inventado por el matemático francés Édouard Lucas en el año de 1883. El juego consiste en pasar una pila de "n" discos con varios tamaños a una varilla vertical, bajo las siguientes reglas:

1. Se tienen tres varillas verticales.
2. En un inicio todos los discos se encuentran en una misma varilla, ordenados de forma ascendente (de arriba hacia abajo) de acuerdo con la longitud de su diámetro.
3. Los discos se sobreponen, siempre y cuando un disco que se encuentra por encima de otro, posea un radio menor con respecto al primero.
4. Solamente se puede mover un disco a la vez.

Halle una relación de recurrencia que determine el número mínimo de pasos necesarios para resolver este juego. Resuelva la relación de recurrencia utilizando el software *Mathematica*.

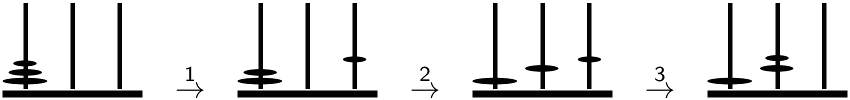
Solución

Sea a_n el número mínimo de pasos necesarios para resolver el juego de las torres de *Hanoi*.
Si $n = 1$, se tiene un único disco y en dicho caso, el juego finaliza en un paso ($a_1 = 1$), al tomar el disco y trasladarlo a cualquiera de las dos varillas verticales sobrantes. Si $n = 2$ el juego se resuelve en tres pasos ($a_2 = 3 = 2 \cdot a_1 + 1$), tal y como lo muestra la siguiente figura:



Solución

Si $n = 3$ el juego procesa inicialmente tres pasos, traslando los dos primeros discos a una varilla, luego un paso más para acomodar el disco de diámetro mayor en otra varilla y los pasos requeridos (de nuevo tres) para acomodar los otros dos discos de diámetro menor, sobre el disco más grande, es decir, tendríamos que $a_3 = 7 = 2 \cdot a_2 + 1$ pasos necesarios. Lo anterior se visualiza así:



Solución

En este punto se traslada el disco de diámetro mayor a la última varilla vertical y se ordenan los dos discos más pequeños sobre él.

De estos casos particulares, se infieren los datos de la siguiente tabla:

n	S
1	$a_1 = 1$
2	$a_2 = 3 = 2 \cdot a_1 + 1$
3	$a_3 = 7 = 2 \cdot a_2 + 1$
$\vdots$	$\vdots$
n	$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1$

Solución

Finalmente, $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1$ con $a_1 = 1 \ \forall n, \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2$.
La librería **VilCretas** integra el comando `RR` que determina la solución de una relación de recurrencia lineal. Es similar a la instrucción `RT` en cuanto al empleo de dos vectores para pasar la ecuación recursiva y las condiciones iniciales, respectivamente. Además, utiliza un tercer parámetro donde se especifica la variable con respecto a la cual se brindará el resultado. Presenta la opción "`inicio`" necesaria en caso de que las condiciones iniciales no comiencen en 1.

In[ ] :=

```
RR[{2, 1}, {1}, n]
```

Solución

Se obtiene la siguiente salida:

Out[ ] $=$

-1 + 2^n

Es decir, $a_n = -1 + 2^n \ \forall n, \ n \in \mathbb{N}$.

Nota

Como se señalará en el capítulo 3 de este libro, la expresión $-1+2^n$ realiza un conteo que representa un análisis de algoritmos, al calcular la cantidad mínima de pasos requeridos en la solución del juego de las torres de *Hanoi* con n discos, si se pensara en implementar dicho juego en algún ambiente de programación. Por otra parte, el alumno debe compreder el concepto de solución de una relación de recurrencia. En este ejercicio la fórmula $-1+2^n$ se considera la solución de la recursividad, pues ella genera la misma sucesión de números reales que $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1$ sujeta a $a_1 = 1$, con la diferencia de realizarlo más rápidamente, desde un punto de vista computacional.

Explicación en video

https://youtu.be/ny9jQWm-Yiw

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Recurrencia/File-26.zip

Resolución de relaciones de recurrencia

Prof. Enrique Vílchez Quesada

Universidad Nacional de Costa Rica

- Encontrar la solución de una relación de recurrencia consiste en determinar, si es posible, una función explícita que permita calcular de manera directa cada uno de los elementos de la sucesión que la recursividad representa. En esta sección se estudiarán dos métodos de resolución clásicos: el iterativo y un método para abordar cierto tipo de relaciones de recurrencia, llamadas “homogéneas lineales con coeficientes constantes”.

- El método iterativo es un recurso viable cuando la relación de recurrencia a resolver es de orden uno. Éste se basa en utilizar la definición base de la recursividad y llamar por iteraciones (o repeticiones) a esa expresión hasta obtener la condición inicial. En ese punto, se trata de establecer una fórmula general que determina de manera explícita los elementos de la sucesión. Este proceso permite conjeturar la solución general, sin embargo, el resultado obtenido no es más que una presunción a ser demostrada por inducción matemática o alguna otra técnica.

Example (2.5)

Resuelva la relación de recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + 7$ con $a_0 = 3$. Utilice el software *Wolfram Mathematica* para verificar el resultado.

Solución

En este ejemplo la relación de recurrencia es de orden uno por lo que el método iterativo resulta conveniente. Iniciamos con la ecuación recursiva:

$$a_n = 2a_{n-1} + 7 \tag{1}$$

Ahora nos interesa conocer el resultado de a_{n-1}, esto es, se sustituye n en 1 por $n-1$, luego:

$$a_{n-1} = 2a_{n-2} + 7 \tag{2}$$

En cuyo caso, al reemplazar 2 en 1 se obtiene:

$$a_n = 2\left(2a_{n-2} + 7\right) + 7 = 2^2 a_{n-2} + 2 \cdot 7 + 7 \tag{3}$$

Solución

La igualdad anterior, constituye la primera iteración del método. Se procede ahora, de manera similar con a_{n-2} :

$$a_{n-2} = 2a_{n-3} + 7 \tag{4}$$

Sustituyendo 4 en 3:

$$a_n = 2^2\left(2a_{n-3} + 7\right) + 2 \cdot 7 + 7 = 2^3 a_{n-3} + 2^2 \cdot 7 + 2 \cdot 7 + 7$$

Esto brinda la igualdad correspondiente a la segunda iteración. La tercera iteración se genera al considerar $a_{n-3} = 2a_{n-4} + 7$, de donde el estudiante comprobará:

$$a_n = 2^4 a_{n-4} + 7\left(2^3 + 2^2 + 2 + 1\right) \tag{5}$$

Solución

El método iterativo asume que si continuamos con este procedimiento hasta obtener la condición inicial $a_0 = 3$, se consigue la solución de la relación de recurrencia. Antes de ello es necesario visualizar el patrón manifestado en las distintas iteraciones ya desarrolladas. En este aspecto, la práctica irá proporcionando al alumno una mayor soltura y capacidad de observación. Para este ejemplo, al analizar el resultado de la iteración tres, expuesto en 5, se aprecia cómo a_{n-4} está siendo multiplicado por una potencia de dos elevada precisamente a la cuatro, es decir, el valor que resta a n en el subíndice, constituye el exponente de la potencia en base dos. Los otros sumandos son fáciles de predecir, al recrearse una sucesión descendente de potencias de dos, multiplicadas cada una por siete.

Solución

En ese contexto, se conjetura la siguiente fórmula general:

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2^{\mathbf{n}} a_{\underbrace{0 = n - \mathbf{n}}} + 7\left(2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 1\right) \\
&= 2^n a_0 + 7\left(2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 1\right) \\
&= 3 \cdot 2^n + 7\left(2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 1\right) = 3 \cdot 2^n + 7\sum_{j=1}^{n} 2^{n-j}
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

Nota

Es importante notar que:

$$\sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} = \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j}$$

por lo que cualquiera de las dos sumatorias es factible en el proceso restante. La primera sumatoria genera la suma de manera descendente, tal y como se aprecia en 6. La segunda sumatoria desarrolla la misma suma pero con un orden ascendente: $1 + \cdots + 2^{n-1}$.

Solución

El estudiante podría pensar naturalmente que ya se ha finalizado, sin embargo, la suma $3 \cdot 2^n + 7 \sum_{j=1}^{n} 2^{n-j}$ se puede reducir usando las instrucciones `Simplify` y `Sum` del software *Mathematica*:

In[ ] :=

```
Simplify[3 2^n + 7 Sum[2^(n - j), {j, 1, n}]]
```

Out[ ] =

-7 + 5 2^(1 + n)

Finalmente, la relación de recurrencia tiene como solución:

$$a_n = 5 \cdot 2^{n+1} - 7 \; \forall n, \; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Solución

El resultado anterior, se puede verificar utilizando el comando `RR` del paquete **VilCretas**. En *Mathematica*:

In[ ] :=

```
RR[{2, 7}, {3}, n, inicio -> 0]
```

Out[ ] =

```
-7 + 5 2^(1 + n)
```

La librería **VilCretas** cuenta también con el comando `MetodoI` para ejecutar de manera automática "*k*" iteraciones del método iterativo sobre una relación de recurrencia de orden uno. En este ejercicio, se emplearía así:

In[ ] :=

```
MetodoI[{2, 7}, 3]
```

Solución

Se obtiene la siguiente salida:

Out[ ] =

Por el método iterativo:

n -> -1+n: 7+7 2^1+a[-2+n] 2^2

n -> -2+n: 7+7 2^1+7 2^2+a[-3+n] 2^3

n -> -3+n: 7+7 2^1+7 2^2+7 2^3+a[-4+n] 2^4

La salida de `MetodoI` será exitosa siempre y cuando los números reales involucrados en los cálculos sean enteros, de lo contrario, el comando no muestra ningún **Out[ ]**.

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Recurrencia/File-27.zip

Explicación en video

https://youtu.be/sKqS91r73VI

Example (2.6)

Determine por medio de una fórmula explícita los elementos de la sucesión dada por la relación de recurrencia $a_n = a_{n-1} + 2 + 3^{n-1}$ con $a_0 = 1$. Verifique el resultado utilizando el comando `RR`.

Solución

La relación de recurrencia de este ejercicio es de orden uno, razón por la cual se utilizará el método iterativo. Al aplicar llamadas sucesivas o iteraciones en la recursividad de este ejemplo, se obtiene:

En $n-1$	$a_{n-1} = a_{n-2} + 2 + 3^{n-2}$
	$\Rightarrow a_n = \left(a_{n-2} + 2 + 3^{n-2}\right) + 2 + 3^{n-1}$
	$\Rightarrow a_n = a_{n-2} + 2 \cdot 2 + 3^{n-1} + 3^{n-2}$
En $n-2$	$a_{n-2} = a_{n-3} + 2 + 3^{n-3}$
	$\Rightarrow a_n = \left(a_{n-3} + 2 + 3^{n-3}\right) + 2 \cdot 2 + 3^{n-1} + 3^{n-2}$
	$\Rightarrow a_n = a_{n-3} + 2 \cdot 3 + 3^{n-1} + 3^{n-2} + 3^{n-3}$
En $n-3$	$a_{n-3} = a_{n-4} + 2 + 3^{n-4}$
	$\Rightarrow a_n = \left(a_{n-4} + 2 + 3^{n-4}\right) + 2 \cdot 3 + 3^{n-1} + 3^{n-2} + 3^{n-3}$
	$\Rightarrow a_n = a_{n-4} + 2 \cdot 4 + 3^{n-1} + 3^{n-2} + 3^{n-3} + 3^{n-4}$

Solución

El comando `MetodoI` permite confirmar los cálculos de las iteraciones anteriores:

In[ ] :=

```
MetodoI[{1, 2 + 3^(n - 1)}, 3]
```

Out[ ] =

Por el método iterativo:

n -> -1+n: 2+3^(-1+n)+(2+3^(-2+n)) 1^1+a[-2+n] 1^1

n -> -2+n: 2+3^(-1+n)+(2+3^(-3+n)) 1^1+(2+3^(-2+n)) 1^1+a[-3+n] 1^1

n -> -3+n: 2+3^(-1+n)+(2+3^(-4+n)) 1^1+(2+3^(-3+n)) 1^1+(2+3^(-2+n)) 1^1+a[-4+n] 1^1

Nota

El alumno podría cuestionarse ¿cuántas iteraciones son requeridas con la intención de aplicar apropiadamente el método?, no hay una respuesta definitiva, sin embargo, se sugiere efectuar al menos tres iteraciones para buscar la solución general.

Solución

El patrón manifestado en las iteraciones, muestra un 2 multiplicado por el número que resta a n en el subíndice y asimismo, una serie de potencias en base tres, en orden descedente, comenzando con el exponente $n-1$ y hasta el valor de ese subíndice. Luego, generalizando el comportamiento mostrado:

$$\begin{aligned}
&a_n = a_{\underbrace{\mathbf{0} = n - \mathbf{n}}} + 2\mathbf{n} + \left(3^{n-1} + \cdots + 3^1 + 3^{\mathbf{0}}\right) \\
&\Rightarrow a_n = a_0 + 2n + \left(3^{n-1} + \cdots + 3^1 + 3^0\right) \\
&\Rightarrow a_n = 1 + 2n + \left(3^{n-1} + \cdots + 3^1 + 3^0\right)
\end{aligned}$$

Ahora se debe simplifcar la última suma hallada, donde:

$$1 + 2n + \left(3^{n-1} + \cdots + 3^1 + 3^0\right) = 1 + 2n + \sum_{j=1}^{n} 3^{n-j} \tag{7}$$

Solución

Como consencuencia, en *Wolfram Mathematica*:

In[ ] :=

```
Simplify[1 + 2 n + Sum[3^(n - j), {j, 1, n}]]
```

Out[ ] =

```
1/2 (1 + 3^n + 4 n)
```

Solución

También, en el **In[ ]**, se pudo haber empleado la sumatoria:

$$\sum_{j=0}^{n-1} 3^j$$

que es equivalente a la compartida en 7, solo que en orden ascendente. Usando el comando RR de la librería **VilCretas** es factible verificar la correctitud de lo resuelto con el método iterativo:

In[ ] :=

```
RR[{1, 2 + 3^(n - 1)}, {1}, n, inicio -> 0]
```

Out[ ] =

1/2 (1 + 3^n + 4 n)

Solución

Finalmente:

$$a_n = \frac{3^n + 4n + 1}{2} \;\forall n,\; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Recurrencia/File-28.zip

Example (2.7)

Resuelva por el método iterativo y con ayuda de *Mathematica*, la relación de recurrencia $a_n = 3a_{n-1} + n$ con $a_0 = 5$.

Solución

En este ejemplo la relación de recurrencia nuevamente es de orden uno, esto hace viable el uso del método iterativo. Al ejecutar tres iteraciones:

En $n-1$	$a_{n-1} = 3a_{n-2} + n - 1$
	$\Rightarrow a_n = 3\left(3a_{n-2} + n - 1\right) + n$
	$\Rightarrow a_n = 3^2 a_{n-2} + 3^1\left(n-1\right) + 3^0 n$
En $n-2$	$a_{n-2} = 3a_{n-3} + n - 2$
	$\Rightarrow a_n = 3^2\left(3a_{n-3} + n - 2\right) + 3^1\left(n-1\right) + 3^0 n$
	$\Rightarrow a_n = 3^3 a_{n-3} + 3^2\left(n-2\right) + 3^1\left(n-1\right) + 3^0 n$
En $n-3$	$a_{n-3} = 3a_{n-4} + n - 3$
	$\Rightarrow a_n = 3^3\left(3a_{n-4} + n - 3\right) + 3^2\left(n-2\right) + 3^1\left(n-1\right) + 3^0 n$
	$\Rightarrow a_n = 3^4 a_{n-4} + 3^3\left(n-3\right) + 3^2\left(n-2\right) + 3^1\left(n-1\right) + 3^0 n$

Solución

Con la instrucción `MetodoI` se comprueba el acierto de las iteraciones expuestas:

In[ ] :=

```
MetodoI[{3, n}, 3]
```

Out[ ] =

Por el método iterativo:

n -> -1+n: n+(-1+n) 3^1+a[-2+n] 3^2

n -> -2+n: n+(-1+n) 3^1+(-2+n) 3^2+a[-3+n] 3^3

n -> -3+n: n+(-1+n) 3^1+(-2+n) 3^2+(-3+n) 3^3+a[-4+n] 3^4

Solución

De estos resultados se conjetura un comportamiento de sumandos con potencias de tres en orden descendente, multiplicadas cada una por un coeficiente numérico igual a n menos el exponente de la potencia, es decir, en general:

$$a_n = 3^{\mathbf{n}} a_{\underbrace{0 = n - \mathbf{n}}} + 3^{n-1} \cdot (n - (n-1)) + 3^{n-2} \cdot (n - (n-2)) + \cdots$$
$$\cdots + 3^1 (n-1) + 3^0 (n-0)$$
$$\Rightarrow a_n = 5 \cdot 3^n + 3^{n-1} \cdot 1 + 3^{n-2} \cdot 2 + \cdots + 3^1 (n-1) + 3^0 n$$

Solución

En notación de sumatoria se tendrían dos posibilidades:

$$a_n = 5 \cdot 3^n + \sum_{j=1}^{n} \left(3^{n-j} \cdot j\right) = 5 \cdot 3^n + \sum_{j=0}^{n-1} \left(3^j \cdot (n-j)\right)$$

Nos interesa ahora encontrar una forma reducida para a_n. Utilizando en *Wolfram Mathematica* la segunda sumatoria:

In[ ] :=

```
Simplify[5 3^n + Sum[3^j (n - j), {j, 0, n - 1}]]
```

Out[ ] =

1/4 (-3 + 23 3^n - 2 n)

Solución

Al contrastar con la salida de la sentencia `RR` se verifica la veracidad de la fórmula hallada:

In[ ] :=

```
RR[{3, n}, {5}, n, inicio -> 0]
```

Out[ ] =

```
1/4 (-3 + 23 3^n - 2 n)
```

En conclusión:

$$a_n = \frac{23 \cdot 3^n - 2n - 3}{4} \ \forall n,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Recurrencia/File-29.zip

Example (2.8)

Una persona invierte US \$5000 al 13 % de interés compuesto anual. Encuentre y resuelva una relación de recurrencia que represente la cantidad de dinero después de n años.

Solución

Este ejercicio implica poner en práctica lo explicado al inicio del capítulo, referido a la construcción de relaciones de recurrencia para representar la solución de un problema y lo expuesto en esta sección, vinculado con el método iterativo.

El interés compuesto significa que el dinero inicial invertido se capitaliza, es decir, se invierte hasta la culminación del período de interés y se suma la ganancia al capital original. Al término de dicho período los intereses no se retiran, sino que se suman al capital acumulado y se toma el total como el nuevo capital de partida.

Si a_n representa la cantidad de dinero después de n años, se observa que $a_0 = 5000$, pues en el año cero el capital corresponde a la inversión original. Además, el capital ganado en el año n es igual al dinero acumulado en el año anterior $n-1$, más los intereses obtenidos al 13 %, simbólicamente:

$$a_n = a_{n-1} + 0{,}13 \cdot a_{n-1} = 1{,}13 \cdot a_{n-1}$$

Solución

Para resolver esta relación de recurrencia es posible usar el método iterativo al ser de orden uno. Iterando tres veces se aprecia que:

En $n-1$	$a_{n-1} = 1{,}13 \cdot a_{n-2} \Rightarrow a_n = 1{,}13 \cdot (1{,}13 \cdot a_{n-2})$
	$\Rightarrow a_n = (1{,}13)^2 \cdot a_{n-2}$
En $n-2$	$a_{n-2} = 1{,}13 \cdot a_{n-3} \Rightarrow a_n = (1{,}13)^2 \cdot (1{,}13 \cdot a_{n-3})$
	$\Rightarrow a_n = (1{,}13)^3 \cdot a_{n-3}$
En $n-3$	$a_{n-3} = 1{,}13 \cdot a_{n-4} \Rightarrow a_n = (1{,}13)^3 \cdot (1{,}13 \cdot a_{n-4})$
	$\Rightarrow a_n = (1{,}13)^4 \cdot a_{n-4}$

Solución

Como consecuencia, se conjetura que:

$$a_n = (1{,}13)^{\mathbf{n}} \cdot a_{\underbrace{0 = n - \mathbf{n}}} = (1{,}13)^n \cdot a_0 = 5000 \cdot (1{,}13)^n \;\; \forall n,\; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

El lector puede comprobar que el **Out[ ]** de la instrucción RR devuelve el mismo resultado anterior:

In[ ] :=

```
RR[{1.13}, {5000}, n, inicio -> 0]
```

Out[ ] =

5000. 0.884956^(-1. n)

Se observa cómo $(0{,}884956)^{-1} = 1{,}13$, verificándose la misma respuesta.

Nota

Se aclara al estudiante que el comando `MetodoI` no retorna ningún **Out[ ]** en este ejercicio, pues el valor de 1,13 en la relación de recurrencia implica números no enteros en las iteraciones y como ya se había señalado en la página 64, `MetodoI` no es capaz de procesar valores con números reales decimales.

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Recurrencia/File-30.zip

Example (2.9)

Una fábrica se dedica al diseño de automóviles deportivos. En su primer mes de apertura fabricó un auto, en su segundo mes dos y en su tercer mes de operaciones construyó tres vehículos. De acuerdo con este comportamiento, establezca una relación de recurrencia que cuente el número total de autos fabricados después de n meses. Resuelva la relación de recurrencia correspondiente. Verifique el resultado utilizando el software *Wolfram Mathematica*.

Solución

Al igual que en el ejemplo 2.8, en este caso, se debe primero construir una relación de recurrencia. Ella representa el conteo de autos solicitado. Con ese objetivo se usará un razonamiento de lo particular a lo general (razonamiento inductivo), suponiendo que a_n es la cantidad de autos fabridados después de n meses:

n	a_n
1	$a_1 = 1$, este es el caso raíz
2	$a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$
3	$a_3 = a_2 + 3 = 3 + 3 = 6$
4	$a_4 = a_3 + 4 = 6 + 4 = 10$
5	$a_5 = a_4 + 5 = 10 + 5 = 15$

Solución

Esto nos permite inferir que: $a_n = a_{n-1} + n$ con $a_1 = 1$ $\forall n$, $n \in \mathbb{N}$. Al ser esta relación de recurrencia de orden uno es aplicable el método iterativo:

En $n-1$	$a_{n-1} = a_{n-2} + n - 1$
	$\Rightarrow a_n = (a_{n-2} + n - 1) + n$
	$\Rightarrow a_n = a_{n-2} + (n-1) + n$
En $n-2$	$a_{n-2} = a_{n-3} + n - 2$
	$\Rightarrow a_n = (a_{n-3} + n - 2) + (n-1) + n$
	$\Rightarrow a_n = a_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n$
En $n-3$	$a_{n-3} = a_{n-4} + n - 3$
	$\Rightarrow a_n = (a_{n-4} + n - 3) + (n-2) + (n-1) + n$
	$\Rightarrow a_n = a_{n-4} + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n$

Solución

Observando los resultados de las iteraciones, se tiene la presencia de una suma que finaliza en n e inicia en el consecutivo del subíndice. El estudiante debe notar, por ejemplo en la última iteración, cómo el consecutivo del subíndice $n-4$ corresponde a $n-3$, dado que $(n-4)+1=n-3$. Generalizando se concluye que:

$$a_n = a_{\mathbf{1}} + (\mathbf{1}+1) + 3 + \cdots + n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{j=1}^{n} j$$

Solución

Esta última, corresponde a la conocida sumatoria de *Gauss* donde:

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

Por lo tanto:

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \ \forall n,\ n \in \mathbb{N}$$

Solución

Una verificación en *Mathematica* de estos resultados, se comparte a continuación:

In[ ] :=

```
MetodoI[{1, n}, 3]
Simplify[Sum[j, {j, 1, n}]]
RR[{1, n}, {1}, n]
```

Out[ ] =

Por el método iterativo:

n -> -1+n: n+(-1+n) 1^1+a[-2+n] 1^1

n -> -2+n: n+(-2+n) 1^1+(-1+n) 1^1+a[-3+n] 1^1

n -> -3+n: n+(-3+n) 1^1+(-2+n) 1^1+(-1+n) 1^1+a[-4+n] 1^1

1/2 n (1 + n)

1/2 n (1 + n)

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Recurrencia/File-31.zip

Valor de inicio del caso raíz

En todos los ejemplos compartidos en esta sección, exceptuando el 2.9, el lector comprobará que la condición inicial de la relación de recurrencia a resolver, comenzó en 0. Es importante señalar que no siempre el caso raíz iniciará en 0 y de acuerdo con ello, la fórmula obtenida en el método iterativo para la misma recursividad, tendrá usualmente algunas variantes si el inicio se da en 0, en 1, en 2 o en cualquier otro entero positivo.

Valor de inicio del caso raíz

Reconsideremos, para explicar esta idea, el ejemplo 2.5, asumiendo que la condición inicial comienza en uno:

$$a_n = 2a_{n-1} + 7 \text{ con } a_1 = 3$$

Al emplear el método iterativo cambiaría la fórmula general pues la última invocación llegaría hasta a_1 y ya no hasta a_0, es decir:

$$a_n = 2^{\mathbf{n-1}} a_{\underbrace{1 = n - (\mathbf{n-1})}} + 7\left(2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 1\right)$$

$$= 3 \cdot 2^{n-1} + 7\sum_{j=2}^{n} 2^{n-j}$$

Valor de inicio del caso raíz

Esto conduciría a:

$$a_n = 5 \cdot 2^n - 7 \; \forall n, \; n \in \mathbb{N}$$

Y por lo tanto, la respuesta ha variado si se le compara con la del ejercicio original.

Valor de inicio del caso raíz

Veamos un segundo caso. Supóngase que en el ejemplo 2.6, se replantea el comienzo de la condición inicial a 2 :

$$a_n = a_{n-1} + 2 + 3^{n-1} \text{ con } a_2 = 1$$

Luego, al utilizar el método iterativo y generalizar:

$$a_n = a_{\underbrace{\mathbf{2} = n - (\mathbf{n} - \mathbf{2})}} + 2\,(\mathbf{n} - \mathbf{2}) + \left(3^{n-1} + \cdots + 3^{\mathbf{2}}\right)$$

$$= 1 + 2\,(n-2) + \sum_{j=1}^{n-2} 3^{n-j}$$

Valor de inicio del caso raíz

Por lo que, al simplificar en *Wolfram*:

$$a_n = \frac{3^n + 4n - 15}{2} \ \forall n,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$$

Nuevamente, el resultado ha cambiado con respecto al ejercicio inicial.

Nota

En conclusión, el alumno debe ser cuidadoso al usar el método iterativo porque como ya se ha evidenciado, la solución de una relación de recurrencia de orden uno, normalmente dependerá del valor de inicio de su caso raíz.

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Recurrencia/File-32.zip

Iniciaremos con el concepto de relación de recurrencia homogénea lineal con coeficientes constantes.

Definition (2.2)

Una relación de recurrencia homogénea lineal con coeficientes constantes de orden k, es aquella de la forma:

$$a_n = \beta_1 a_{n-1} + \beta_2 a_{n-2} + \cdots + \beta_k a_{n-k}$$

sujeta a k condiciones iniciales $a_1 = c_1$, $a_2 = c_2$, ... , $a_k = c_k$ $\forall n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k+1$. A la ecuación $t^k - \beta_1 t^{k-1} - \beta_2 t^{k-2} - \cdots - \beta_k = 0$ se le denomina ecuación característica asociada a la relación de recurrencia.

En la definición 2.2 la palabra homogénea, significa que a la expresión $\beta_1 a_{n-1} + \beta_2 a_{n-2} + \cdots + \beta_k a_{n-k}$ no se le está sumando ninguna función $f(n)$ (esto incluye constantes). Por otro lado, el vocablo lineal hace incapié en la ecuación recursiva a la aparición de potencias únicamente iguales a 1 en a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_{n-k}. De coeficientes constantes, quiere decir, que los "betas": β_1, β_2, ..., β_k son números reales y no funciones de n. Y naturalmente, de orden k significa que en la ecuación base, a_n depende de "k" términos anteriores: a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_{n-k}.

Como veremos, la solución de una relación de recurrencia homogénea lineal depende de las raíces o soluciones de su ecuación característica. El siguiente teorema enuncia la metodología a emplear en relaciones de recurrencia homogéneas lineales de orden dos y dicho resultado, se puede generalizar para órdenes mayores.

Theorem (2.1)

Sea la relación de recurrencia homogénea lineal con coeficientes constantes de orden dos: $a_n = \beta_1 a_{n-1} + \beta_2 a_{n-2}$ *con* $a_1 = c_1$ *y* $a_2 = c_2$*.*

1. *Si la ecuación característica* $t^2 - \beta_1 t - \beta_2 = 0$ *tiene dos raíces distintas* r_1 *y* r_2*, la solución de la relación de recurrencia viene dada por:*

$$a_n = b_1 (r_1)^n + b_2 (r_2)^n \;\; \forall n, n \in \mathbb{N}$$

2. *Si la ecuación característica* $t^2 - \beta_1 t - \beta_2 = 0$ *tiene una única raíz* r*, la solución de la relación de recurrencia viene dada por:*

$$a_n = b_1 r^n + b_2 n \cdot r^n \; \forall n, n \in \mathbb{N}$$

Siendo b_1 *y* b_2 *dos constantes obtenidas a través de las condiciones iniciales* $a_1 = c_1$ *y* $a_2 = c_2$*.*

Comentario sobre el teorema 2.1

En este teorema es importante realizar algunas observaciones:

1. El teorema sigue siendo válido, si las condiciones iniciales de la relación de recurrencia no comienzan en $n = 1$, sino en cualquier otro valor entero no negativo.
2. Se proponen únicamente dos casos con respecto a las soluciones de una ecuación característica cuadrática (dos raíces diferentes y dos raíces iguales) pues en el conjunto de los números complejos, denotado como $\mathbb{C}$, dicha ecuación no puede puede tener solución vacía. Si el estudiante no tiene conocimientos previos sobre $\mathbb{C}$, basta con comprender que los números complejos son una extención del conjunto de los números reales, donde se asume que $\sqrt{-1}$ es igual al número complejo imaginario $i = (0, 1)$.

Comentario sobre el teorema 2.1

3. Las ideas expuestas se satisfacen también para una relación de recurrencia homogénea lineal de orden 3. En dicho caso, las raíces pueden tener tres posibilidades en $\mathbb{C}$: ser todas distintas, dos iguales o las tres idénticas.
   - Si todas son distintas y corresponden a r_1, r_2 y r_3, la solución de la relación de recurrencia tiene la forma: $a_n = b_1 (r_1)^n + b_2 (r_2)^n + b_3 (r_3)^n$.
   - Si existen dos raíces iguales a r_1 y otra distinta igual a r_2, la solución viene dada por: $a_n = b_1 (r_1)^n + b_2 n (r_1)^n + b_3 (r_2)^n$.
   - Finalmente, si todas las raíces son iguales a r la solución de la relación de recurrencia corresponde a: $a_n = b_1 r^n + b_2 n \cdot r^n + b_3 n^2 \cdot r^n$.

Comentario sobre el teorema 2.1

Nota

En general, utilizando un razonamiento similar es posible resolver relaciones de recurrencia homogéneas lineales de orden cuatro, cinco, seis u otros. El número de posibilidades a contemplar en $\mathbb{C}$ siempre será igual al orden de la relación de recurrencia. En el orden cuatro, por ejemplo, existen cuatro casos a considerar: que las cuatro raíces de la ecuación característica sean distintas, que tres de ellas sean diferentes, que dos sean distintas, o bien, que todas sean iguales.

Example (2.10)

Resuelva la relación de recurrencia que produce la sucesión de números de *Fibonacci*.

Solución

La relación de recurrencia que genera los números *Fibonacci* viene dada por: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ con $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$ $\forall n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Por la forma de esta recursividad y de acuerdo con la definición 2.2, ésta es homogénea lineal con coeficientes constantes de orden dos, donde se aprecia que $\beta_1 = \beta_2 = 1$. Por lo tanto, la ecuación característica asociada en este ejemplo es:

$$t^2 - \beta_1 t - \beta_2 = 0 \Rightarrow t^2 - t - 1 = 0$$

cuyas raíces son:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ y } r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Solución

Lo anterior se obtiene aplicando la conocida fórmula general que posiblemente el alumno abordó en su educación secundaria. Ella propone, para una ecuación cuadrática $at^2 + bt + c = 0$, que sus raíces r vienen dadas por:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En este ejemplo:

$$r = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Solución

El software *Wolfram Mathematica* cuenta con un interesante comando que resuelve casi cualquier tipo de ecuación y para efectos del procedimiento descrito en el teorema 2.1, será de mucha utilidad. La instrucción se llama `Solve`, ésta recibe la ecuación a resolver y sus incógnitas. En la ecuación característica de este ejercicio, al usar `Solve` se obtiene:

In[ ] :=

```
Solve[t^2 - t - 1 == 0, t]
```

Out[ ] =

{{t -> 1/2 (1 - Sqrt[5])}, {t -> 1/2 (1 + Sqrt[5])}}

Solución

"Sqrt" simboliza la raíz cuadrada. En `Solve` la igualdad se expresa con "==" en lugar de "=", pues como ocurre en cualquier ambiente de programación, el "=" constituye un operador de asignación por lo que si se emplea dentro del `Solve`, la sentencia arrojará un mensaje de error.
El teorema 2.1 estipula que si las raíces de la ecuación caractarística son distintas, como sucede en este ejemplo, la forma de la solución de la relación de recurrencia es $a_n = b_1 (r_1)^n + b_2 (r_2)^n$, en este contexto:

$$a_n = b_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + b_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \tag{8}$$

Solución

Cabe destacar que el orden en como se han colacado las raíces r_1 y r_2 en a_n se podría variar, tomando primero $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Debemos ahora encontrar los valores de las constantes b_1 y b_2. Para ello, se utilizan las condiciones iniciales de la relación de recurrencia, en este caso, $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$. En 8, si reemplazamos n por 1 y n por 2 se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} b_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + b_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \\ b_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + b_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} b_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} b_2 = 1 \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 b_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 b_2 = 1 \end{cases}$$

Solución

Un sistema de ecuaciones lineales como el anterior, puede ser resuelto a través de distintos métodos existentes en la literatura, tales como: el método de suma, el método de sustitución, el método de *Jordan-Gauss* y la regla de *Cramer*. En este libro, con el objetivo de simplicar los cálculos aritméticos involucrados, se utilizará el software *Mathematica* como principal recurso. La instrucción `Solve` a este respecto, también resuelve sistemas de ecuaciones lineales, veamos:

In[ ] :=

```
Solve[{(1 + Sqrt[5])/2 b1 + (1 - Sqrt[5])/2 b2 ==1,
((1 + Sqrt[5])/2)^2 b1 + ((1 - Sqrt[5])/2)^2 b2 == 1}, {b1,
b2}]
```

Out[ ] =

{{b1 -> 1/Sqrt[5], b2 -> -((5 - Sqrt[5])/(5 (-1 + Sqrt[5])))}}

Solución

En `Solve`, un sistema se escribe colocando entre llaves cada ecuación separada por una coma. Además, al final, las incógnitas se especifican bajo la misma sintaxis del uso de llaves.

Ya se han encontrado los valores correspondientes a b_1 y b_2, falta ahora, finalmente, reemplazar estas constantes en 8:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{5-\sqrt{5}}{5\left(-1+\sqrt{5}\right)}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \;\forall n,\, n \in \mathbb{N} \qquad (9)$$

Nota

En algunos textos se asume el comienzo en 0 y no en 1, de las condiciones iniciales en la relación de recurrencia que produce los números de *Fibonacci*. Se insta al estudiante a ejecutar el procedimiento ya explicado con $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ sujeta a $a_0 = a_1 = 1$ $\forall n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Siendo así, el alumno comprobará que:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \quad \forall n,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \qquad (10)$$

Solución

En apariencia, las expresiones 9 y 10 podría pensarse que son muy diferentes, sin embargo, ambas construyen la sucesión de números de *Fibonacci*. La primera lo hace, partiendo de $n = 1$ y la segunda, de $n = 0$. Una verificación en *Wolfram* sobre la equivalencia de ambas funciones se puede procesar así:

In[ ] :=

```
Table[Simplify[1/Sqrt[5] ((1 + Sqrt[5])/2)^n -
(5 - Sqrt[5])/(5 (-1 + Sqrt[5])) ((1 - Sqrt[5])/2)^n] ==
Simplify[1/Sqrt[5] ((1 + Sqrt[5])/2)^n -
1/Sqrt[5] ((1 - Sqrt[5])/2)^n], {n, 1, 20}]
```

Out[ ] =

{True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True}

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Recurrencia/File-33.zip

Example (2.11)

Considere la relación de recurrencia $3a_n = 7a_{n-1} - 2a_{n-2}$ sujeta a las condiciones iniciales $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$. Verifique el resultado por medio del comando `RR`.

Solución

La relación de recurrencia dada en este ejemplo es homogénea lineal con coeficientes constantes de orden dos. Iniciamos encontrando los coeficientes númericos β_1 y β_2, para ello es necesario despejar a_n :

$$3a_n = 7a_{n-1} - 2a_{n-2} \Rightarrow a_n = \frac{7}{3}a_{n-1} - \frac{2}{3}a_{n-2}$$

Por lo tanto, $\beta_1 = \frac{7}{3}$, $\beta_2 = -\frac{2}{3}$ y la ecuación característica de esta relación de recurrencia es:

$$t^2 - \beta_1 t - \beta_2 = 0 \Rightarrow t^2 - \frac{7}{3}t - \left(-\frac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow t^2 - \frac{7}{3}t + \frac{2}{3} = 0$$

Solución

En *Wolfram Mathematica* esta ecuación se resuelve así:

In[ ] :=

```
Solve[t^2 - 7/3 t + 2/3 == 0, t]
```

Out[ ] =

{{t -> 1/3}, {t -> 2}}

En virtud del teorema 2.1, al tener dos raíces distintas $r_1 = \frac{1}{3}$ y $r_2 = 2$, a_n toma la forma:

$$a_n = b_1 \left(\frac{1}{3}\right)^n + b_2 \cdot 2^n \tag{11}$$

Solución

Debemos encontrar en este punto del proceso, las constantes b_1 y b_2 usando las condiciones iniciales del enunciado, es decir, $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$. Sustituyendo n por 0 y 1 en 11, se forma el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} b_1 \left(\frac{1}{3}\right)^0 + b_2 \cdot 2^0 = 1 \\ b_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + b_2 \cdot 2^1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 + b_2 = 1 \\ \frac{1}{3} b_1 + 2b_2 = 2 \end{cases}$$

Solución

Al resolverlo en *Mathematica* se obtiene:

In[ ] :=

```
Solve[{b1 + b2 == 1, 1/3 b1 + 2 b2 == 2}, {b1, b2}]
```

Out[ ] =

{{b1 -> 0, b2 -> 1}}

Finalmente, sustituyendo b_1 y b_2 en 11:

$$a_n = 0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 \cdot 2^n = 2^n \ \forall n,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Solución

El comando RR verifica el resultado anterior:

In[ ] :=

```
RR[{7/3, -2/3}, {1, 2}, n, inicio -> 0]
```

Out[ ] =

2^n

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Recurrencia/File-34.zip

Example (2.12)

Sea la sucesión de números reales $\{3, 4, -16, -192, -1280, -7168, -36864, \ldots\}$ encuentre y resuelva una relación de recurrencia que la represente.

Solución

El enunciado de este ejercicio es similar al del ejemplo 2.3 donde se empleó una técnica de trabajo inductiva (de lo particular a lo general) para intentar dar con la relación de recurrencia que representara la sucesión de números reales correspondiente. Siguiendo esa misma lógica, se aprecia en este caso cómo:

n	S
1	$a_1 = 3$
2	$a_2 = 4 = a_1 + 1$
3	$a_3 = -16 = a_2 - 20$
4	$a_4 = -192 = a_3 - 176$
5	$a_5 = -1280 = a_4 - 1088$
6	$a_6 = -7168 = a_5 - 5888$
7	$a_7 = -36864 = a_6 - 29696$

Solución

Donde en la secuencia $1, -20, -176, -1088, -5888$ y -29696 no es factible deducir ningún patrón o comportamiento general, lo cual ocurre pues muy probablemente la relación de recurrencia buscada, no es de orden uno. Ante este tipo de ejercicios, el paquete **VilCretas** cuenta con la instrucción `FindRRHL`. Este comando determina, si es posible, una relación de recurrencia homogénea lineal con coeficientes constantes que genera una sucesión de números reales pasada como un parámetro. En este ejemplo:

In[ ] :=

```
FindRRHL[{3, 4, -16, -192, -1280, -7168, -36864}, a, n]
```

Solución

Se obtiene la siguiente salida:

Out[ ] =

{a[n] == -16 a[-2 + n] + 8 a[-1 + n], a[1] == 3, a[2] == 4, -2^(-2 + 2 n) (-5 + 2 n)}

En `FindRRHL` se observan dos argumentos adicionales: la `a` que simboliza el apelativo que se le brinda a la recursividad a encontrar y la `n` que indica el nombre de la variable dependiente.

Nota

La instrucción `FindRRHL` no siempre proporciona una salida exitosa pues en algunas ocasiones no es capaz de encontrar la relación de recurrencia deseada. Si es así, `FindRRHL` muestra como resultado de salida NaD.

Solución

Del **Out[ ]** arrojado en este ejercicio, se interpreta que:

$$a_n = -16a_{n-2} + 8a_{n-1} \text{ con } a_1 = 3 \text{ y } a_2 = 4 \tag{12}$$

Por otro lado, la última componente del vector de salida:

$$-2^{-2+2n}(-5+2n) \tag{13}$$

ofrece la solución de la relación de recurrencia. Este resultado lo demostraremos empleando las ideas compartidas en el teorema 2.1, al ser la recursividad 2.12 homogénea lineal de orden dos. En ella, el alumno debe ser muy cuidadoso al considerar en el orden correcto los valores de β_1 y β_2. Aquí, pese al orden mostrado por el software, primero se debe tomar el coeficiente numérico de a_{n-1} y luego el de a_{n-2}, por esta razón, $\beta_1 = 8$ y $\beta_2 = -16$.

Solución

La ecuación característica $t^2 - 8t + 16 = 0$, tiene una única solución, $r = 4$. Luego, por el segundo caso propuesto en el teorema 2.1:

$$a_n = b_1 r^n + b_2 n \cdot r^n = b_1 4^n + b_2 n \cdot 4^n$$

Al utilizar las condiciones iniciales de a_n se forma el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 3 \\ a_2 = 4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_1 4^1 + b_2 \cdot 1 \cdot 4^1 = 3 \\ b_1 4^2 + b_2 \cdot 2 \cdot 4^2 = 4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4b_1 + 4b_2 = 3 \\ 16b_1 + 32b_2 = 4 \end{array} \right.$$

Solución

Por consiguiente, en *Wolfram*:

In[ ] :=

```
Solve[{4 b1 + 4 b2 == 3, 16 b1 + 32 b2 == 4}, {b1, b2}]
```

Out[ ] =

{{b1 -> 5/4, b2 -> -(1/2)}}

Finalmente:

$$a_n = \frac{5}{4} \cdot 4^n - \frac{n}{2} \cdot 4^n \ \forall n, \ n \in \mathbb{N}$$

Solución

Al comparar la solución expuesta en 13 con la anterior, por leyes de potencias se tiene que:

$$
\begin{aligned}
&-2^{-2+2n}(-5+2n) = -2^{-2+2n}\cdot -5 - 2^{-2+2n}\cdot 2n \\
&= (-1)\cdot(-1)\cdot 2^{-2}\cdot 2^{2n}\cdot 5 - 2^{-2}\cdot 2^{2n}\cdot 2n \\
&= \frac{1}{4}\cdot 4^{n}\cdot 5 - \frac{1}{4}\cdot 4^{n}\cdot 2n = \frac{5}{4}\cdot 4^{n} - \frac{n}{2}\cdot 4^{n}
\end{aligned}
$$

También, como otra alternativa menos formal, un `Table` podría contribuir a verificar la igualdad en algunos valores de n:

In[ ] :=

```
Table[-2^(-2 + 2 n) (-5 + 2 n) == 5/4 4^n - n/2 4^n,
{n, 1, 20}]
```

Out[ ] =

{True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True,
True, True, True, True, True, True, True, True, True}

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Recurrencia/File-35.zip

Explicación en video

https://youtu.be/Mcg5RqU0Zk8

Example (2.13)

Resuelva la relación de recurrencia homogénea lineal de orden tres: $a_n = 9a_{n-1} - 26a_{n-2} + 24a_{n-3}$ con $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ y $a_3 = 4$. Usando la instrucción `RR` verifique el resultado.

Solución

En este ejemplo se debe aplicar lo mencionado en la página 53, donde se realizó una generalización del teorema 2.1 para resolver relaciones de recurrencia homogéneas lineales de orden tres. En este ejercicio, la ecuación característica de la recursividad dada corresponde a:

$$t^3 - \beta_1 t^2 - \beta_2 t - \beta_3 = 0 \Rightarrow t^3 - 9t^2 - (-26)t - 24 = 0$$

$$\Rightarrow t^3 - 9t^2 + 26t - 24 = 0$$

Al resolverla en *Wolfram Mathematica* se obtiene:

In[ ] :=

```
Solve[t^3 - 9 t^2 + 26 t - 24 == 0, t]
```

Out[ ] =

{{t -> 2}, {t -> 3}, {t -> 4}}

Solución

Las raíces $r_1 = 2$, $r_2 = 3$ y $r_3 = 4$ son distintas, por lo tanto, a_n adquiere la forma:

$$a_n = b_1\left(r_1\right)^n + b_2\left(r_2\right)^n + b_3\left(r_3\right)^n = b_1 2^n + b_2 3^n + b_3 4^n$$

Utilizando esta expresión y las condiciones iniciales $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ y $a_3 = 4$, se construye el siguiente sistema de ecuaciones lineales, en este caso, tres por tres (tres ecuaciones con tres incógnitas):

$$\left\{\begin{array}{l} b_1 2^1 + b_2 3^1 + b_3 4^1 = 2 \\ b_1 2^2 + b_2 3^2 + b_3 4^2 = 3 \\ b_1 2^3 + b_2 3^3 + b_3 4^3 = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2b_1 + 3b_2 + 4b_3 = 2 \\ 4b_1 + 9b_2 + 16b_3 = 3 \\ 8b_1 + 27b_2 + 64b_3 = 4 \end{array}\right.$$

Solución

Al resolverlo con *Mathematica*:

In[ ] :=

```
Solve[{2 b1 + 3 b2 + 4 b3 == 2, 4 b1 + 9 b2 + 16 b3 == 3,
8 b1 + 27 b2 + 64 b3 == 4}, {b1, b2, b3}]
```

Out[ ] =

{{b1 -> 7/4, b2 -> -(2/3), b3 -> 1/8}}

De donde, se concluye entonces que:

$$a_n = \frac{7}{4}2^n - \frac{2}{3}3^n + \frac{1}{8}4^n \ \forall n,\ n \in \mathbb{N} \tag{14}$$

Solución

El comando `RR` también resuelve relaciones de recurrencia de orden tres:

In[ ] :=

```
RR[{9, -26, 24}, {2, 3, 4}, n]
```

Out[ ] =

1/24 (3 2^(2 n) + 21 2^(1 + n) - 16 3^n)

Solución

La respuesta devuelta por `RR` es equivalente a lo compartido en 14, lo cual se puede verificar por medio de un `Table`:

In[ ] :=

```
Table[7/4 2^n - 2/3 3^n + 1/8 4^n ==
1/24 (3 2^(2 n) + 21 2^(1 + n) - 16 3^n), {n, 1, 20}]
```

Out[ ] =

{True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True}

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Recurrencia/File-36.zip

Comando `MetodoRRHL`

La librería **VilCretas** provee la instrucción `MetodoRRHL` que aplica paso a paso el procedimiento de resolución ya explicado en esta sección, asociado a una relación de recurrencia homogénea lineal con coeficientes constantes de orden k.
Si se utilizara el comando `MetodoRRHL` con el objetivo de revisar la respuesta de lo desarrollado en el ejemplo 2.13, se procedería así:

In[ ] :=

```
MetodoRRHL[{9, -26, 24}, {2, 3, 4}, n, b]
```

Comando MetodoRRHL

Se obtiene la siguiente salida:

Out[ ] =

La ecuación característica corresponde a: -24+26 n-9 n^2+n^3=0
Raíz o raíces de la ecuación característica: {2,3,4}
La forma que toma la solución de la relación de recurrencia es: 2^n b_1+3^n b_2+4^n b_3
El sistema de ecuaciones a resolver corresponde a:
{2 b_1+3 b_2+4 b_3==2,4 b_1+9 b_2+16 b_3==3,8 b_1+27 b_2+64 b_3==4}
La solución del sistema de ecuaciones es:
{b_1->7/4,b_2->-(2/3),b_3->1/8}
La solución de la relación de recurrencia corresponde a:
1/24 (3 2^(2 n)+21 2^(1+n)-16 3^n)

Comando `MetodoRRHL`

Los parámetros `n` y `b` en `MetodoRRHL` especifican la variable de la ecuación característica y del sistema de ecuaciones lineales, respectivamente. Así como otras instrucciones vinculadas con este capítulo, `MetodoRRHL`, presenta la opción “`inicio`” necesaria cuando las condiciones iniciales no comienzan en 1.

Comando `MetodoRRHL`

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Recurrencia/File-37.zip

Explicación en video

https://youtu.be/mEeklXEbxoM

Example (2.14)

Resuelva $a_n = 21a_{n-1} - 81a_{n-2} - 729a_{n-3} + 4374a_{n-4}$ con $a_2 = -9$, $a_3 = 1$, $a_4 = -1$ y $a_5 = 7$. Verifique los pasos realizados mediante `MetodoRRHL`.

Solución

La ecuación característica de esta recursividad es:

$$
\begin{aligned}
t^4 - \beta_1 t^3 - \beta_2 t^2 - \beta_3 t - \beta_4 = 0 \\
\Rightarrow t^4 - 21t^3 - (-81)t^2 - (-729)t - 4374 = 0 \\
\Rightarrow t^4 - 21t^3 + 81t^2 + 729t - 4374 = 0
\end{aligned}
$$

Al resolverla en *Wolfram Mathematica*:

In[ ] :=

```
Solve[t^4 - 21 t^3 + 81 t^2 + 729 t - 4374 == 0, t]
```

Out[ ] =

{{t -> -6}, {t -> 9}, {t -> 9}, {t -> 9}}

Solución

Hay dos raíces distintas $r_1 = -6$ y $r_2 = 9$. Esta última se dice que es de multiplicidad algebraica tres pues se repite tres veces. Al respecto, por lo señalado en la página 106:

$$a_n = b_1 (r_1)^n + b_2 (r_2)^n + b_3 n \cdot (r_2)^n + b_4 n^2 \cdot (r_2)^n$$
$$\Rightarrow a_n = b_1 (-6)^n + b_2 9^n + b_3 n \cdot 9^n + b_4 n^2 \cdot 9^n$$

Solución

En cuyo caso:

$$\begin{cases} a_2 = -9 \\ a_3 = 1 \\ a_4 = -1 \\ a_5 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1\left(-6\right)^2 + b_2 9^2 + b_3 2 \cdot 9^2 + b_4 2^2 \cdot 9^2 = -9 \\ b_1\left(-6\right)^3 + b_2 9^3 + b_3 3 \cdot 9^3 + b_4 3^2 \cdot 9^3 = 1 \\ b_1\left(-6\right)^4 + b_2 9^4 + b_3 4 \cdot 9^4 + b_4 4^2 \cdot 9^4 = -1 \\ b_1\left(-6\right)^5 + b_2 9^5 + b_3 5 \cdot 9^5 + b_4 5^2 \cdot 9^5 = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 36b_1 + 81b_2 + 162b_3 + 324b_4 = -9 \\ -216b_1 + 729b_2 + 2187b_3 + 6561b_4 = 1 \\ 1296b_1 + 6561b_2 + 26\,244b_3 + 104\,976b_4 = -1 \\ -7776b_1 + 59\,049b_2 + 295\,245b_3 + 1476\,225b_4 = 7 \end{cases}$$

Solución

En *Wolfram*:

In[ ] :=

```
Solve[{36 b1 + 81 b2 + 162 b3 + 324 b4 == -9,
-216 b1 + 729 b2 + 2187 b3 + 6561 b4 == 1,
1296 b1 + 6561 b2 + 26244 b3 + 104976 b4 == -1,
-7776 b1 + 59049 b2 + 295245 b3 + 1476225 b4 == 7},
{b1, b2, b3, b4}]
```

Out[ ] =

{{b1 -> -(3419/60750), b2 -> -(296281/820125), b3 -> 89611/492075, b4 -> -(2191/98415)}}

Solución

Por lo que, se concluye:

$a_n = -\frac{3419}{60750}(-6)^n - \frac{296281}{820125}9^n + \frac{89611}{492075}n \cdot 9^n - \frac{2191}{98415}n^2 \cdot 9^n \; \forall n, n \in \mathbb{N},\; n \geq 2$

Usando `MetodoRRHL`:

In[ ] :=

```
MetodoRRHL[{21, -81, -729, 4374}, {-9, 1, -1, 7}, n, b,
inicio -> 2]
```

Se obtiene la siguiente salida:

Solución

Out[ ] =

La ecuación característica corresponde a:
-4374+729 n+81 n^2-21 n^3+n^4=0
Raíz o raíces de la ecuación característica: {-6,9,9,9}
La forma que toma la solución de la relación de recurrencia es:
(-6)^n b_1+9^n b_2+9^n n b_3+9^n n^2 b_4
El sistema de ecuaciones a resolver corresponde a:
{9 (4 b_1+9 b_2+18 b_3+36 b_4)==-9,-27 (8 b_1-27 b_2-81 b_3-243 b_4)==1, 81 (16 b_1+81 b_2+324 b_3+1296 b_4)==-1,-243 (32 b_1-243 b_2-1215 b_3-6075 b_4)==7}
La solución del sistema de ecuaciones es:
{b_1->-(3419/60750),b_2->-(296281/820125), b_3->89611/492075,b_4->-(2191/98415)}
La solución de la relación de recurrencia corresponde a:
-(1/250) 3^(-9+n) (276939 (-2)^n+592562 3^(1+n)-896110 3^n n+109550 3^n n^2)

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Recurrencia/File-38.zip

En ocasiones, existen relaciones de recurrencia en donde al realizar un cambio de variable, se reducen a una relación homogénea lineal con coeficientes constantes. Veamos el siguiente ejemplo.

Example (2.15)

Resuelva $\sqrt{a_n} = 2\sqrt{a_{n-1}} + 3\sqrt{a_{n-2}}$ con $a_1 = 2$ y $a_2 = 3$.

Solución

Al observar la relación de recurrencia dada, ésta tiene una estructura muy similar a una relación homogénea lineal con coeficientes constantes de orden dos. Si tomamos $c_n = \sqrt{a_n}$ la recurrencia original se reduce a:

$$c_n = 2c_{n-1} + 3c_{n-2}$$

La cual se puede resolver aplicando el teorema 2.1. La ecuación característica corresponde a $t^2 - 2t - 3 = 0$ que tiene como soluciones $r_1 = -1$ y $r_2 = 3$. Por lo tanto:

$$c_n = b_1 \left(-1\right)^n + b_2 3^n$$

Solución

Al examinar las condiciones iniciales tenemos:

$$a_1 = 2 \Rightarrow c_1 = \sqrt{2}$$
$$a_2 = 3 \Rightarrow c_2 = \sqrt{3}$$

Se forma entonces el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} b_1 (-1)^1 + b_2 3^1 = \sqrt{2} \\ b_1 (-1)^2 + b_2 3^2 = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b_1 + 3b_2 = \sqrt{2} \\ b_1 + 9b_2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

Solución

En *Mathematica*:

In[ ] :=

```
Solve[{-b1 + 3 b2 == Sqrt[2], b1 + 9 b2 == Sqrt[3]},
{b1, b2}]
```

Out[ ] =

{{b1 -> 1/4 (-3 Sqrt[2] + Sqrt[3]), b2 -> 1/12 (Sqrt[2] + Sqrt[3])}}

Es decir:

$$c_n = b_1 (-1)^n + b_2 3^n = \sqrt{a_n} \Rightarrow (b_1 (-1)^n + b_2 3^n)^2 = (\sqrt{a_n})^2$$
$$\Rightarrow a_n = \left\{ \left[\tfrac{1}{4} \left(-3\sqrt{2} + \sqrt{3} \right) \right] (-1)^n + \left[\tfrac{1}{12} \left(\sqrt{2} + \sqrt{3} \right) \right] 3^n \right\}^2 \forall n,\ n \in \mathbb{N}$$

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Recurrencia/File-39.zip

Raíces imaginarias en la ecuación característica

La ecuación característica de una relación de recurrencia homogénea lineal con coeficientes constantes, puede tener soluciones que no corresponden a un número real, dichas raíces se reconocen al utilizar el comando `Solve`, pues se muestran acompañadas del número i, señalado en la página 104. A un número complejo que no es un número real se le llama "número imaginario". Si la ecuación característica tiene raíces imaginarias el procedimiento de resolución de la relación de recurrencia sigue siendo exactamente igual al de raíces reales. Por ejemplo, supongamos dada:

$$a_n = -a_{n-2} \text{ con } a_1 = a_2 = 1$$

Raíces imaginarias en la ecuación característica

Al querer resolverla, se construye su ecuación característica, donde $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 = -1$:

$$t^2 - 0t - (-1) = 0 \Rightarrow t^2 + 1 = 0$$

En *Wolfram*:

In[ ] :=

```
Solve[t^2 + 1 == 0, t]
```

Out[ ] =

{{t -> -i}, {t -> i}}

Raíces imaginarias en la ecuación característica

La i en el **Out[ ]**, nos indica la presencia de dos raíces imaginarias distintas, $r_1 = -i$ y $r_2 = i$. Si el procedimiento a aplicar para resolver la relación de recurrencia es el acostumbrado, entonces:

$$a_n = b_1 (r_1)^n + b_2 (r_2)^n = b_1 (-i)^n + b_2 i^n$$

Luego, se forma el sistema de ecuaciones lineales requerido, tomando como base $a_1 = a_2 = 1$:

$$\begin{cases} b_1 (-i)^1 + b_2 i^1 = 1 \\ b_1 (-i)^2 + b_2 i^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -ib_1 + ib_2 = 1 \\ i^2 b_1 + i^2 b_2 = 1 \end{cases}$$

Raíces imaginarias en la ecuación característica

En *Mathematica*:

In[ ] :=

```
Solve[{-I b1 + I b2 == 1, I^2 b1 + I^2 b2 == 1}, {b1, b2}]
```

Out[ ] =

{{b1 -> -(1/2) + I/2, b2 -> -(1/2) - I/2}}

Raíces imaginarias en la ecuación característica

Nota

La “I” (i mayúscula) representa en *Wolfram Mathematica* la unidad imaginaria $i = (0, 1)$.

Finalmente:

$$a_n = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(-i)^n + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) i^n \ \forall n,\ n \in \mathbb{N}$$

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Recurrencia/File-40.zip

- Otro tipo interesante de relación de recurrencia está constituido por las relaciones lineales no homogéneas con coeficientes constantes.

Una relación de recurrencia lineal no homogénea con coeficientes constantes tiene la forma:

$$a_n = \beta_1 a_{n-1} + \beta_2 a_{n-2} + \cdots + \beta_k a_{n-k} + f(n)$$

estando sujeta a k condiciones iniciales $a_1 = c_1$, $a_2 = c_2$, ... , $a_k = c_k$ $\forall n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k+1$ y siendo $f(n)$ una función (esto incluye una constante). Por el alcance del presente texto se omitirá su método de resolución. Se sugiere al lector en caso de estar interesado, consultar para profundizar sobre este tema, el artículo:

https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/ARTICULOS_V10_N1_2009/RESOLUCION_RELACIONES_RECURRENCIA/Resoluciondereelacionesderecurrencia.pdf

- Un documento con un formato computable (*CDF*) que muestra la evaluación, la gráfica y la solución de una relación de recurrencia lineal, homogénea o no homogénea, con coeficientes constantes, se comparte a continuación. Se insta al lector a explorar el archivo.

Descargue un archivo

`https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/CDFs/Recurrencias.cdf.zip`

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Cuadernos/Recurrencia.pdf.rar

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Recurrencia/Quiz_recurrencia.rar

Abra un sitio web

https://www.symbaloo.com/mix/vilcretasrecurrencias

¡Recuerde resolver los ejercicios asignados!

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Recurrencia/Excercises.zip

enrique.vilchez.quesada@una.cr
http://www.escinf.una.ac.cr/discretas