Relaciones binarias

Prof. Enrique Vílchez Quesada

Universidad Nacional de Costa Rica

Introducción

- La teoría de relaciones provee un conjunto de conceptos, propiedades y operaciones que permiten modelar lo que cotidianamente se entendería como una relación o vinculación entre objetos. Estos objetos pueden ser personas, números, expresiones algebraicas, algoritmos, vectores, matrices o cualquier otro tipo de estructura.
- En computación las relaciones y particularmente las relaciones binarias, tienen una importancia crucial, pues brindan las bases necesarias para comprender los fundamentos del tema de grafos que se abordará más adelante en el presente texto.

Definición 4.1

- Una relación binaria es una lista de pares ordenados obtenidos del "producto cartesiano" entre dos conjuntos. Antes de formular esta definición, se recordará al lector la operación "producto cruz".

Definition (4.1)

Sean A y B dos conjuntos distintos de vacío. El producto cruz también llamado producto cartesiano entre A y B, representado por $A \times B$, se define como:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Producto cruz

- Si se desea calcular el producto cartesiano entre dos conjuntos A y B, de acuerdo con la definición 1, se deben formar todos los posibles pares ordenados al tomar un elemento del primer conjunto A y otro del segundo conjunto B, en ese orden. Naturalmente, este proceso nos hace intuir que la cantidad de elementos o cardinalidad del conjunto $A \times B$, siendo A y B conjuntos finitos, corresponde a la multiplicación de la cardinalidad de A con respecto a la cardinalidad de B. Lo anterior, se representa simbólicamente así:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| \tag{1}$$

- Iniciaremos con un ejemplo de cálculo del producto cruz.

Example (4.1)

Determine $A \times B$ si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. Verifique el resultado por medio del software *Mathematica*.

Solución del ejemplo 4.1

Al tomar como elemento fijo a "a" se forman los pares ordenados $(a, 1)$, $(a, 2)$ y $(a, 3)$. Luego, si se toma como fijo a "b" se producen los pares $(b, 1)$, $(b, 2)$ y $(b, 3)$. Ahora, al realizar lo mismo con "c", se generan los pares ordenados $(c, 1)$, $(c, 2)$ y $(c, 3)$. Finalmente:

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\,(c, 1), (c, 2), (c, 3)\}$$

Como se observa, en correspondencia con 1:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 3 \cdot 3 = 9$$

Solución del ejemplo 4.1

En *Mathematica* el comando `PC` del paquete **VilCretas** efectúa la operación producto cartesiano. Veamos:

In[ ] :=

```
A = {a, b, c};
B = {1, 2, 3};
PC[A, B]
```

Out[ ] =

{{a, 1}, {a, 2}, {a, 3}, {b, 1}, {b, 2}, {b, 3}, {c, 1}, {c, 2}, {c, 3}}

Nota

Se aprecia en el **Out[ ]**, desde un punto de vista sintáctico, el hecho de que un par ordenado se expresa en el software mediante el uso de llaves y no de paréntesis redondos como sería lo usual. Este es un aspecto clave que el lector debe tomar en cuenta, al ingresar pares ordenados en *Wolfram Mathematica*.

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-68.zip

Explicación en video

https://youtu.be/y1NusmXWzno

Example (4.2)

Representa con el software *Mathematica* $A \times B$, con $A = \{a \in \mathbb{R} \mid 1 \leq a \leq 4\}$ y $B = \{b \in \mathbb{R} \mid 1 \leq b \leq 5\}$.

Solución del ejemplo 4.2

Como A y B son subconjuntos (intervalos) del conjunto de los números reales, su producto cruz está constituido por pares ordenados que se pueden representar en el plano cartesiano. Por la definición 1:

$$A \times B = \{(a, b) \mid 1 \leq a \leq 4 \wedge 1 \leq b \leq 5\}$$

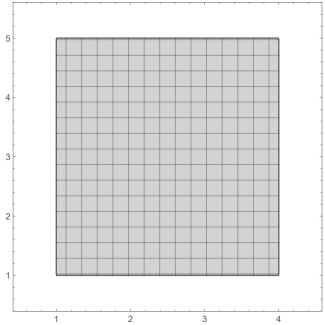
$A \times B$ forma una región de puntos en el sistema de coordenadas rectangulares, visualizable en *Mathematica* mediante la setencia `GraficaPC` de la librería **VilCretas**.

Solución del ejemplo 4.2

En `GraficaPC` los intervalos son pasados como argumentos de la función:
In[ ] :=

```
GraficaPC[{1, 4}, {1, 5}]
```

Out[ ] =



Solución del ejemplo 4.2

En términos sintácticos, el uso de llaves fue necesario para representar los intervalos respectivos. Es interesante notar que la región a derivado en la construcción de un rectángulo y su interior. Esto ocurre, por lo general, al graficar en el plano cartesiano el producto cruz entre dos intervalos.

Nota

`GraficaPC` admite intervalos con extremos infinitos. En dicho caso, la gráfica se despliega sobre el eje coordenado que corresponda, iniciando en -100 si el extremo del intervalo es $-\infty$, o bien, asumiendo un valor máximo de 100 si el extremo del intervalo es $+\infty$. En la figura 15 se muestra la gráfica de $]-\infty, 4] \times [1, +\infty[$, generada por la línea de código `GraficaPC[{-Infinity, 4}, {1, +Infinity}]`. En ella, la región rectangular sobre el eje x a comenzado en -100 por el extremo $-\infty$ de $]-\infty, 4]$ y en el eje y, ha finalizado en 100 por el extremo $+\infty$ de $[1, +\infty[$.

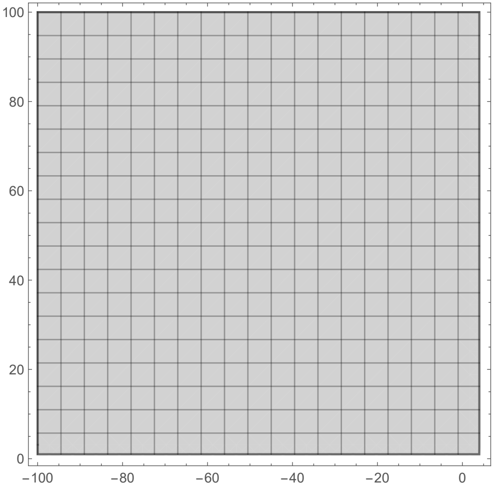


Figura: Gráfica de $]-\infty, 4] \times [1, +\infty[$

Solución del ejemplo 4.2

Otro aspecto interesante que se infiere de este ejemplo, consiste en analizar gráficamente el resultado de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Como el alumno preverá, este producto cruz es igual a todo el plano cartesiano xy.
Finalmente, cabe indicar que no se ha solicitado en este ejercicio calcular por extensión $A \times B$, tal y como se hizo en el ejemplo 2, pues es imposible hallar los elementos "uno por uno" de $A \times B$ al ser A y B conjuntos infinitos.

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-69.zip

Explicación en video

https://youtu.be/g2-PkfJsq48

La definición 1 es generalizable a n conjuntos. Si A_1, A_2, ..., A_n forman una familia de conjuntos no vacíos, entonces:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_j \in A_j, \forall j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq n\}$$

Es decir, para n conjuntos, $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ está conformado por vectores con n componentes llamados $n-$tuplas. En este libro no se hace énfasis a esta amplitud de la operación producto cruz, pues las relaciones de interés se circunscriben en las relaciones binarias y no en las relaciones $n-$arias.

- Con la intención de introducir el concepto de relación binaria se enuncia la siguiente definición.

Definición 4.2

Definition (4.2)

Una relación binaria R sobre dos conjuntos A y B distintos de vacío es un subcojunto del producto cartesiano $A \times B$. Si $(a, b) \in R$ se denota aRb y se dice que "a" está relacionado con "b" por R, en caso contrario, se representa la no relación entre "a" y "b" como aRb. Al conjunto $D = \{a \in A \mid aRb\}$ se le llama dominio de R y a $Rang = \{b \in B \mid aRb\}$ se le denomina rango o ámbito de la relación. Si en particular $A = B$ se dice que R es una relación sobre el conjunto A, o bien, que R es una relación homogénea, en caso contrario, $A \neq B$, R es heterogénea.

Comentario sobre la definición 4

El estudiante debe notar que la noción de dominio y ámbito emergida de la definición 4, establece que el dominio de una relación binaria es el conjunto de todos los elementos de A que están relacionados con "al menos un elemento" en B y asimismo, el rango o ámbito de una relación binaria es el conjunto de todos los elementos de B para los cuales existe "al menos un elemento" de A relacionado con él. Bajo esta perspectiva, en la identificación del dominio y del rango de una relación binaria siempre se aplica el cuantificador "al menos un" y no el cuantificador "para todo".

- Si se tiene una relación binaria donde para cada elemento "a" de A existe un único elemento "b" de B, ésta constituye una función en el contexto de la teoría de funciones que el estudiante abordó desde su educación preparatoria. Toda función, por lo tanto es una relación binaria, aunque se advierte al lector que no toda relación binaria es una función.
- Para aclarar el concepto de relación binaria se abordarán algunos ejemplos al respecto.

Example (4.3)

Determine el dominio y rango de la relación R dada por: aRb sí y solo sí el máximo común divisor entre a y b es igual a 1, es decir, a y b son primos relativos, con $a \in A = \{1, 3, 5, 7\}$ y $b \in B = \{2, 4, 6, 8\}$. ¿Cuáles valores del máximo común divisor satisfacen que la relación R es distinta de vacío?

Solución del ejemplo 4.3

La definición 4 propone que una relación binaria es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Por consiguiente, para determinar por extensión la relación binaria R, se debe calcular ese conjunto:

$$A \times B = \{(1,2),(1,4),(1,6),(1,8),(3,2),(3,4),(3,6),(3,8),\\ (5,2),(5,4),(5,6),(5,8),(7,2),(7,4),(7,6),(7,8)\}$$

La relación R está formada por todos los pares ordenados (a,b) donde el máximo común divisor entre a y b es igual a 1. En $A \times B$ el único par que no satisface ese criterio es $(3,6)$ pues su máximo común divisor es igual a 3. Por lo tanto:

$$R = \{(1,2),(1,4),(1,6),(1,8),(3,2),(3,4),(3,8),\\ (5,2),(5,4),(5,6),(5,8),(7,2),(7,4),(7,6),(7,8)\}$$

Solución del ejemplo 4.3

Si se desea encontrar el dominio D y el rango $Rang$ de la relación R, atendiendo lo comentado en la página 20, se concluye que $D = A$ y $Rang = B$, pues cada elemento de A está relacionado con al menos un elemento en B y cada elemento de B se vincula con al menos un elemento en A, respectivamente.

Nota

No siempre el dominio y el ámbito de una relación binaria van a coincidir con los conjuntos A y B. Si por ejemplo en este caso, se cambia el criterio de R por: $aRb \Leftrightarrow MCD\,(a, b) = 3$, siendo MCD un acrónimo de "máximo común divisor", aquí, $R = \{(3, 6)\}$, por lo que, el dominio $D = \{3\} \neq A$ y el rango $Rang = \{6\} \neq B$.

Solución del ejemplo 4.3

Por el análisis ya expuesto, ante la pregunta: ¿cuáles valores del máximo común divisor satisfacen que la relación R es distinta de vacío?, se concluye que solamente hay dos posibilidades, 1 y 3. Si el máximo común divisor es 1 la relación R corresponde a $R = \{1,3,5,7\} \times \{2,4,6,8\} - \{(3,6)\}$ y si el máximo común divisor es 3, R se reduce a $R = \{(3,6)\}$. En cualquier otro valor del $MCD\,(a,b)$, aRb, $a \in A = \{1,3,5,7\}$ y $b \in B = \{2,4,6,8\}$, de donde $R = \phi$. Las ideas compartidas en la resolución del ejemplo se pueden trasladar al software *Wolfram Mathematica*. El paquete **VilCretas** integra una interesante sentencia llamada `RelBin`.

Solución del ejemplo 4.3

`RelBin` permite encontrar los pares ordenados que caracterizan a una relación binaria finita, cuando ella viene dada por medio de un criterio o condición(es), como acontece en este ejemplo ($MCD\,(a, b) = 1$). Veamos:

In[ ] :=

```
A = {1, 3, 5, 7};
B = {2, 4, 6, 8};
RelBin["GCD[a,b]==1", A, B]
```

Out[ ] =

{{1, 2}, {1, 4}, {1, 6}, {1, 8}, {3, 2}, {3, 4}, {3, 8}, {5, 2}, {5, 4}, {5, 6}, {5, 8}, {7, 2},{7, 4}, {7, 6}, {7, 8}}

Solución del ejemplo 4.3

El comando `GCD` calcula en el software el máximo común divisor. La instrucción `RelBin` en el **In[ ]** anterior, recibe el criterio de construcción de la relación binaria como un "string" o cadena de caracteres. Esto significa que siempre se pasa a `RelBin` dicha condición o condiciones encerradas entre comillas.

Por otra parte, usando un `Table` y dentro de él, el comando `RelBin`, se conjeturan los valores del máximo común divisor entre a y b para los cuales la relación R no es vacía:

In[ ] :=

```
Table[i -> RelBin["GCD[a,b]==i", A, B], {i, 1, 20}]
```

Solución del ejemplo 4.3

Se obtiene la siguiente salida:

Out[ ] =

{1 -> {{1, 2}, {1, 4}, {1, 6}, {1, 8}, {3, 2}, {3, 4}, {3, 8}, {5, 2}, {5, 4}, {5, 6}, {5, 8}, {7, 2}, {7, 4}, {7, 6}, {7, 8}}, 2 -> {}, 3 -> {{3, 6}}, 4 -> {}, 5 -> {}, 6 -> {}, 7 -> {}, 8 -> {}, 9 -> {}, 10 -> {}, 11 -> {}, 12 -> {}, 13 -> {}, 14 -> {}, 15 -> {}, 16 -> {}, 17 -> {}, 18 -> {}, 19 -> {}, 20 -> {}}

Solución del ejemplo 4.3

Se observa en la salida que si $i \neq 1$ e $i \neq 3$ la relación R es igual al conjunto vacío, $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq 20$. Si se piensa en $i > 20$, $i \in \mathbb{N}$ y se resuelve la misma interpretación, ésta es considerada una conjetura pues no es posible recorrer todo el conjunto de los números naturales a través del `Table`, sin embargo, la deducción lograda es bastante confiable sobre $\mathbb{N}$.

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-70.zip

Explicación en video

https://youtu.be/TbtWP2DLwo4

Example (4.4)

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y R una relación definida sobre A, tal que: $aRb \Leftrightarrow a \geq b$. Encuentre explícitamente el conjunto R y su cardinalidad. Grafique en el plano cartesiano la relación binaria R. Conjeture una fórmula que determine la cantidad de elementos de R si $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Solución del ejemplo 4.4

Utilizando ideas similares a las presentadas en la solución del ejemplo 5, se debe encontrar en primera instancia $A \times A$ con $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, se recurrirá para ello, al comando PC:

In[ ] :=

```
A = Range[5];
PC[A, A]
```

Out[ ] =

{{1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5},
{2, 1}, {2, 2}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5},
{3, 1}, {3, 2}, {3, 3}, {3, 4}, {3, 5},
{4, 1}, {4, 2}, {4, 3}, {4, 4}, {4, 5},
{5, 1}, {5, 2}, {5, 3}, {5, 4}, {5, 5}}

Nota

`Range` es una instrucción del software *Mathematica* que retorna una lista de números naturales consecutivos. `Range[n]` construye un vector con todos los naturales hasta llegar a `n`, `n` un entero positivo. `Range[m, n, k]` forma una lista con todos los números naturales iniciando en `m`, finalizando en un valor menor o igual a `n` y ejecutando en cada paso, un incremento especificado en `k`, `k` un entero positivo. Esta sentencia servirá de apoyo en ejercicios posteriores. El comando `Table` también pudo haberse empleado para crear el conjunto A. `Table[i, {i,5}]` es equivalente a `Range[5]`, pese a ello, el `Range` ofrece un formato más abreviado.

Solución del ejemplo 4.4

¿Cuáles pares ordenados de $A \times A$ satisfacen la condición $a \geq b$?, en la primera fila del **Out[ ]** anterior, solo el par $(1, 1)$, en la segunda los pares $(2, 1)$ y $(2, 2)$, en la tercera fila los pares $(3, 1)$, $(3, 2)$ y $(3, 3)$, en la cuarta fila se tienen los pares ordenados $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$ y $(4, 4)$, y en la última fila, todos los pares cumplen con el criterio de R, luego:

$$R = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2),$$
$$(4,3), (4,4), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)\}$$

Solución del ejemplo 4.4

En consecuencia, la cardinalidad de R es igual a 15. En *Wolfram*, este análisis se logra automatizar así:

In[ ] :=

```
A = Range[5];
R = RelBin["a>=b", A, A]
Length[R]
```

Out[ ] =

{{1, 1}, {2, 1}, {2, 2}, {3, 1}, {3, 2},
{3, 3}, {4, 1}, {4, 2}, {4, 3}, {4, 4},
{5, 1}, {5, 2}, {5, 3}, {5, 4}, {5, 5}}
15

La instrucción `Length`, retorna para este **In[ ]**, la longitud o cardinalidad de R.

Solución del ejemplo 4.4

Los pares ordenados de R se pueden representar mediante una gráfica en el plano cartesiano al contener componentes a y b en el conjunto de los números reales. El comando `GraficaRelBinPares` del paquete **VilCretas**, permite graficar una relación binaria dada de manera explícita por medio del conjunto de pares ordenados que la definen, desde luego, siempre y cuando esos pares ordenados tengan coordenadas numéricas en $\mathbb{R}$.

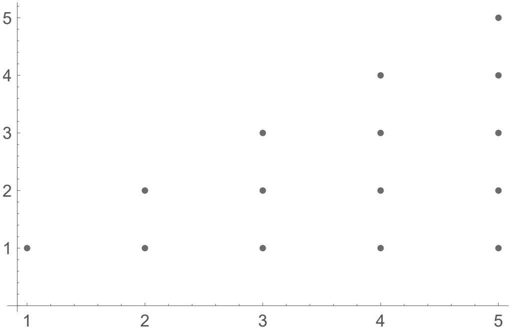
Solución del ejemplo 4.4

En *Wolfram Mathematica*:

In[ ] :=

```
GraficaRelBinPares[R]
```

Out[ ] =



Solución del ejemplo 4.4

Si se desea ahora, conjeturar una fórmula que describa el comportamiento de la cardinalidad de R tomando a $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, la setencia `Table` brinda una opción para analizar distintos casos particulares, con el objetivo de buscar la generalidad de interés:

In[ ] :=

```
Table[Length[RelBin["a>=b", Range[n], Range[n]]], {n, 1, 20}]
```

Out[ ] =

{1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210}

Solución del ejemplo 4.4

Al observar la sucesión S de esta salida y suponiendo que a_n representa la cantidad de elementos de R con $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, se infiere:

n	S
1	$a_1 = 1$
2	$a_2 = 3 = a_1 + 2$
3	$a_3 = 6 = a_2 + 3$
4	$a_4 = 10 = a_3 + 4$
5	$a_5 = 15 = a_4 + 5$
6	$a_6 = 21 = a_5 + 6$

Solución del ejemplo 4.4

De donde, $a_n = a_{n-1} + n$ con $a_1 = 1$. Al resolver a_n usando `RR`:

In[ ] :=

```
RR[{1, n}, {1}, n]
```

Out[ ] =

1/2 n (1 + n)

Por lo tanto:

$$a_n = \frac{n\,(n+1)}{2}\ \forall n,\ n \in \mathbb{N}$$

Solución del ejemplo 4.4

De forma más directa, la fórmula de la cardinalidad de R se podría hallar también, empleando la setencia `FindRRHL`. Veamos:

In[ ] :=

```
FindRRHL[Table[Length[RelBin["a>=b", Range[n], Range[n]]],
{n, 1, 20}], b, n] // Factor
```

Out[ ] =

{b[n] == b[-3 + n] - 3 b[-2 + n] + 3 b[-1 + n], b[1] == 1, b[2] == 3, b[3] == 6, 1/2 n (1 + n)}

Solución del ejemplo 4.4

`Factor` es un comando de *Wolfram* que factoriza una expresión, en el **Out[ ]**, ha factorizado la solución de la relación de recurrencia encontrada. El alumno observará en esta salida una diferencia significativa en la relación de recurrencia obtenida con `FindRRHL`. Era pronosticable esta diferencia pues `FindRRHL` halla una recursividad homogénea lineal con coeficientes constantes y a_n no es una relación de recurrencia de ese tipo. Pese a ello, $b_n = 3b_{n-1} - 3b_{n-2} + b_{n-3}$, $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, $b_3 = 6$ y $a_n = a_{n-1} + n$ con $a_1 = 1$, son recursividades que generan la misma sucesión de números reales, aspecto verificable mediante el uso de un `Table`:

Solución del ejemplo 4.4

In[ ] :=

```
a[n_] := a[n - 1] + n
a[1] = 1;
b[n_] := 3 b[n - 1] - 3 b[n - 2] + b[n - 3]
b[1] = 1;
b[2] = 3;
b[3] = 6;
Table[a[i] == b[i], {i, 1, 20}]
```

Out[ ] =

{True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True, True}

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-71.zip

Explicación en video

https://youtu.be/et6LtRz_rFs

Example (4.5)

Representе en el plano cartesiano la relación R definida como: aRb siendo a y b dos números reales, sí y solo sí satisfacen la ecuación $\frac{a^2}{25} - \frac{b^2}{4} = 1$. ¿Cuál es el domino de R? ¿Cuál es el rango de R? Determine si los pares ordenados de L pertenecen a la relación binaria R con:

$$L = \left\{ \left(5\sqrt{2}, 2\sqrt{3}\right), (-5, 0), \left(2\sqrt{7}, \frac{2}{5}\sqrt{3}\right), \left(\sqrt{2}, \frac{6\sqrt{3}}{5}\right) \left(-6, \frac{2\sqrt{11}}{5}\right), \left(5\sqrt{3}, -2\sqrt{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{25}\right), \left(7\sqrt{7}, -\frac{2\sqrt{318}}{5}\right), \left(\frac{11}{2}, -\frac{\sqrt{21}}{5}\right), \left(-3, \frac{2\sqrt{34}}{5}\right) \right\}$$

Solución del ejemplo 4.5

La relación binaria R está definida sobre el conjunto de los números reales por medio de la ecuación $\frac{a^2}{25} - \frac{b^2}{4} = 1$, lo cual hace que R esté constituida por un conjunto infinito de pares ordenados (a, b). Por este motivo, en este ejemplo, no es factible usar el comando `RelBin` para hallar por extensión la relación binaria.

La librería **VilCretas** provee un comando llamado `GraficaRelBin` cuya función es graficar relaciones binarias homogéneas, definidas mediante una ecuación o desigualdad sobre $\mathbb{R}$.

Solución del ejemplo 4.5

La instrucción recibe entre comillas dicha expresión especificando, además, los intervalos de graficación en los ejes coordenados. En *Wolfram Mathematica* se procede así:

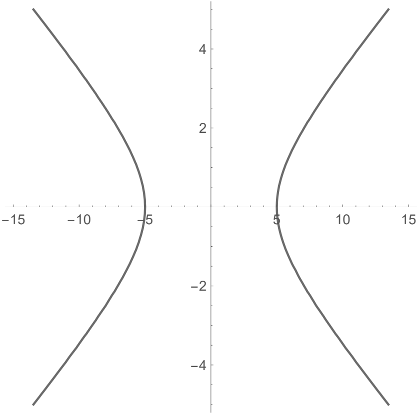
In[ ] :=

```
GraficaRelBin["a^2/25-b^2/4==1", 15, 5, xmin -> -15, ymin
-> -5]
```

Solución del ejemplo 4.5

Se obtiene la siguiente salida:

Out[ ] =



(2)

Solución del ejemplo 4.5

El 15 en `GraficaRelBin` indica el trazo de la gráfica hasta 15 en el eje de las abscisas, el argumento 5 el trazo de la gráfica hasta 5 en el eje de las ordenadas y las opciones `xmin -> -15` y `ymin -> -5` precisan los valores mínimos a tomar en los ejes coordenados. Por defecto, si `xmin` y `ymin` no se utilizan son iguales a -10.
La curva 2 que describe la ecuación $\frac{a^2}{25} - \frac{b^2}{4} = 1$ recibe el nombre de "*hipérbola*". Las hipérbolas forman parte de un conjunto mayor de curvas denominadas "secciones cónicas". Las secciones cónicas poseen múltiples propiedades, sin embargo, no se enunciará ninguna de ellas, pues no son objeto de estudio en este texto.

Nota

Cabe destacar en el comando `GraficaRelBin` la posibilidad de procesar no solamente igualdades sino también inecuaciones. Si en este ejercicio el criterio se hubiera establecido como $\frac{a^2}{25} - \frac{b^2}{4} \geq 1$, `GraficaRelBin` correría con toda normalidad la representación en el plano cartesiano de la relación binaria, eso sí, con la diferencia de mostrar no una curva, sino más bien una región. En la figura 2 se despliega la región producida por la línea de código `GraficaRelBin["a^2/25-b^2/4>=1", 15, 5, xmin -> -15, ymin -> -5]`.

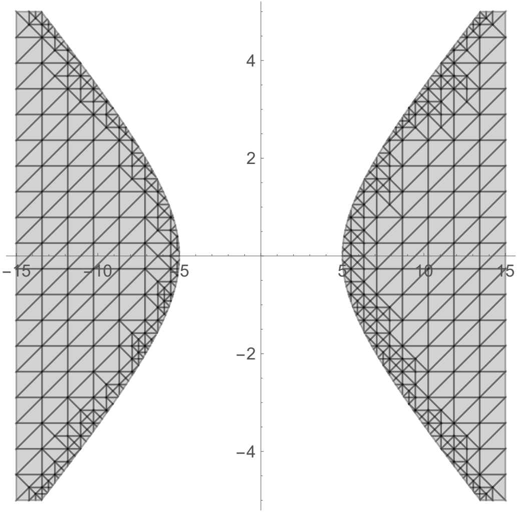


Figura: Gráfica de la relación binaria $aRb \Leftrightarrow \frac{a^2}{25} - \frac{b^2}{4} \geq 1,\ a,\ b \in \mathbb{R}$

Solución del ejemplo 4.5

De la gráfica 2 se infiere que el dominio de R es $D =]-\infty, -5] \cup [5, +\infty[$ y su ámbito es $Rang = \mathbb{R}$. Esto se obtiene al observar el recorrido que hace la *hipérbola* sobre el eje de las abscisas y el eje de las ordenadas, respectivamente.

Por otra parte, si se desea analizar la pertenencia o no en R, de los pares ordenados (a, b) contenidos en la lista L, lo que hay que resolver es si cada uno satisface la ecuación $\frac{a^2}{25} - \frac{b^2}{4} = 1$. Por ejemplo, si se considera el par $\left(2\sqrt{7}, \frac{2}{5}\sqrt{3}\right)$, en él, $a = 2\sqrt{7}$ y $b = \frac{2}{5}\sqrt{3}$, por lo que:

$$\frac{a^2}{25} - \frac{b^2}{4} = \frac{\left(2\sqrt{7}\right)^2}{25} - \frac{\left(\frac{2}{5}\sqrt{3}\right)^2}{4} = \frac{4 \cdot 7}{25} - \frac{\frac{4}{25} \cdot 3}{4} =$$

$$\frac{28}{25} - \frac{12}{100} = \frac{28}{25} - \frac{3}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

Solución del ejemplo 4.5

En $\left(2\sqrt{7}, \frac{2}{5}\sqrt{3}\right)$ se cumple la igualdad buscada y a razón de ello se concluye que este par ordenado sí está en la relación binaria R. Podríamos continuar verificando manualmente los demás pares de L, sin embargo, el paquete **VilCretas** integra una setencia que ejecuta este tipo de pruebas. La instrucción se llama `ElementRelBinQ`.

Nota

Cualquier comando de *Wolfram Mathematica* y de la librería **VilCretas** que finalice en `Q` es una instrucción booleana, en otras palabras, su salida será un valor lógico True o False. `ElementRelBinQ` recibe una relación binaria y un par ordenado retornando True si el par está en la relación, o bien, False en caso contrario.

Solución del ejemplo 4.5

Para el par ordenado $\left(2\sqrt{7}, \frac{2}{5}\sqrt{3}\right)$, `ElementRelBinQ` devuelve:

In[ ] :=

```
ElementRelBinQ["a^2/25-b^2/4>=1", {2 Sqrt[7], 2/5 Sqrt[3]},
expalgebra -> True]
```

Out[ ] =

True

La opción `expalgebra -> True` es indispensable en este ejercicio pues le indica a *Mathematica* que la relación R se define por medio de la expresión algebraica $\frac{a^2}{25} - \frac{b^2}{4}$.

Nota

Cuando R es un conjunto que contiene por extensión todos los pares ordenados de una relación binaria, se debe omitir de `ElementRelBinQ` la opción `expalgebra -> True`.

Solución del ejemplo 4.5

Naturalmente, realizar la comprobación de los diez pares ordenados pertenecientes a L, “uno por uno”, usando la sentencia `ElementRelBinQ`, continua siendo una tarea muy tediosa. En este sentido, `Table` nos ofrece un interesante mecanismo de automatización. Veamos:

In[ ] :=

```
L = {{5 Sqrt[2], 2 Sqrt[3]}, {-5, 0}, {2 Sqrt[7], 2/5
Sqrt[3]}, {Sqrt[2], (6 Sqrt[3])/5}, {-6, (2 Sqrt[11])/5},
{5 Sqrt[3], -2 Sqrt[2]}, {1/4, 1/25}, {7 Sqrt[7], -((2
Sqrt[318])/5)}, {11/2, -(Sqrt[21]/5)}, {-3, (2
Sqrt[34])/5}};
Table[ElementRelBinQ["a^2/25-b^2/4>=1", punto, expalgebra
-> True], {punto, L}]
```

Solución del ejemplo 4.5

Se obtiene la siguiente salida:
Out[ ] $=$

$\{$False, True, True, False, True, True, False, True, True, False$\}$
En el **Out[ ]**, cada True indica que el par ordenado de L ubicado en la misma posición del valor booleano está en la relación binaria R y asimismo, cada False señala lo contrario. Por lo que, se concluye:

Par ordenado	Valor lógico de `ElementRelBinQ`	Interpretación
$\left(5\sqrt{2}, 2\sqrt{3}\right)$	False	No pertenece a R
$(-5, 0)$	True	Pertenece a R
$\left(2\sqrt{7}, \frac{2}{5}\sqrt{3}\right)$	True	Pertenece a R
$\left(\sqrt{2}, \frac{6\sqrt{3}}{5}\right)$	False	No pertenece a R
$\left(-6, \frac{2\sqrt{11}}{5}\right)$	True	Pertenece a R
$\left(5\sqrt{3}, -2\sqrt{2}\right)$	True	Pertenece a R
$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{25}\right)$	False	No pertenece a R
$\left(7\sqrt{7}, -\frac{2\sqrt{318}}{5}\right)$	True	Pertenece a R
$\left(\frac{11}{2}, -\frac{\sqrt{21}}{5}\right)$	True	Pertenece a R
$\left(-3, \frac{2\sqrt{34}}{5}\right)$	False	No pertenece a R

Nota

En el **In[ ]** se aprecia la capacidad del `Table` de aceptar una variación de su parámetro (`punto`) sobre los elementos de un conjunto dado (`L`) y no exclusivamente sobre un rango especificado por el usuario. Este es un interesante uso del comando `Table`. Aquí, en cada iteración, el parámetro del `Table` (`punto`), toma un valor correspondiente a uno de los elementos de un conjunto (`L`) pasado como argumento dentro de la instrucción.

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-72.zip

Explicación en video

https://youtu.be/gVyKMYdrPjw

Explicación en video

https://youtu.be/3_MlOT13UZw

Example (4.6)

Determine con ayuda de *Mathematica* si $(a, b) \in R$ donde:
$aRb \Leftrightarrow b^3 \geq a$, R definida sobre $A = \{1, 3, 5, \ldots, 99\}$ y $(a, b) \in L$ con:

$$L = \{(51, 39), (61, 29), (67, 3), (5, 2), (87, 3), (53, 7), (83, 49), (27, 1), (77, 9), (79, 3)\}$$

Solución del ejemplo 4.6

Un par ordenado $(a, b) \in L$ se encuentra en la relación R si $b^3 \geq a$. Así por ejemplo, $(27, 1)$ no pertenece a R pues $1^3 \not\geq 27$ y $(83, 49)$ se encuentra en R dado que $49^3 \geq 83$. Como hay diez pares ordenados en la lista L se automatizará la prueba de todos ellos, usando un `Table` y de manera anidada el comando `ElementRelBinQ`, en analogía a lo expuesto en el ejemplo 7. Luego:

In[ ] :=

```
A = Range[1, 99, 2];
R = RelBin["b^3>=a", A, A];
L = {{51, 39}, {61, 29}, {67, 3}, {5, 2}, {87, 3}, {53, 7},
{83, 49}, {27, 1}, {77, 9}, {79, 3}};
Table[ElementRelBinQ[R, punto], {punto, L}]
```

Out[ ] =

{True, True, False, False, False, True, True, False, True, False}

Solución del ejemplo 4.6

Por lo tanto, se concluye:

Par ordenado	Valor lógico de `ElementRelBinQ`	Interpretación
$(51,39)$	True	Pertenece a R
$(61,29)$	True	Pertenece a R
$(67,3)$	False	No pertenece a R
$(5,2)$	False	No pertenece a R
$(87,3)$	False	No pertenece a R
$(53,7)$	True	Pertenece a R
$(83,49)$	True	Pertenece a R
$(27,1)$	False	No pertenece a R
$(77,9)$	True	Pertenece a R
$(79,3)$	False	No pertenece a R

Solución del ejemplo 4.6

En esta tabla se aprecia cómo el par ordenado $(5, 2) \notin R$, sin embargo, $2^3 \geq 5$, entonces si se satisface el criterio de la relación ¿por qué este par se excluye? La razón de ello, obedece al hecho de que $2 \notin A$.

Nota

El lector debe percibir en la sentencia `ElementRelBinQ` del **In[ ]**, la omisión del atributo `expalgebra -> True` pues tal y como se mencionó en la página 54, al tener almacenada en la variable R la relación binaria por extensión se tiene que suprimir esa característica. Si el estudiante piensa en sustituir en el `Table` de este ejercicio `ElementRelBinQ[R, punto]` por `ElementRelBinQ["b^3>=a", punto, expalgebra -> True]` buscando otra forma de resolución, cabe destacar en el razonamiento un error conceptual porque en el segundo `ElementRelBinQ` se estaría suponiendo que la relación se encuentra definida en el conjunto de los números reales. Es decir, no es posible en este ejemplo, pasar la relación R al comando `ElementRelBinQ` por medio de una igualdad o desigualdad.

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-73.zip

- Manipular una relación binaria como un conjunto explícito de elementos produce un costo computacional significativo. La sentencia `RelBin` del paquete **VilCretas** eso es lo que hace precisamente en su lógica interna, encontrar todos los pares ordenados del producto cruz y porterior a ello, seleccionar aquellos que cumplan con la condición o condiciones que caracterizan a la relación binaria. Si la cardinalidad de los conjuntos sobre los cuales se define la relación es relativamente grande, se experimentará en *Mathematica* un tiempo de ejecución poco eficiente. En la sección que prosigue se estudiará una forma de representación matricial para las relaciones binarias. Esta matriz es más apropiada si se desea utilizar una relación como parte de un proceso resuelto por un ordenador.

Representaciones de una relación binaria

Prof. Enrique Vílchez Quesada

Universidad Nacional de Costa Rica

Representaciones de una relación binaria

- Hemos planteado la definición de una relación binaria como un subconjunto del producto cartesiano entre dos conjuntos no vacíos A y B. La siguiente definición nos propone una interesante forma de representar una relación a través de una estructura de datos bidimensional, es decir, una matriz.

Definición 4.3

Definition (4.3)

Si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, una relación binaria R de A a B, se puede representar por una matriz de tamaño n por m, denotada $M_R = (m_{ij})$, tal que:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } a_i R b_j \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

A esta matriz se le denomina "matriz de la relación R".

El alumno debe notar que el concepto de matriz de una relación tiene sentido, siempre y cuando, los conjuntos A y B sean finitos. La definición 9 también nos muestra que M_R es una matriz cuyas entradas están constituidas únicamente por ceros y por unos. Este tipo de matrices reciben el nombre de matrices booleanas y como veremos más adelante, poseen ciertas propiedades con importantes aplicaciones en la manipulación de relaciones binarias.

Example (4.7)

Halle una matriz que represente la relación binaria R del ejemplo 5.

Solución del ejemplo 4.7

Si recordamos, en ese ejercicio:

$$R = \{(1,2),(1,4),(1,6),(1,8),(3,2),(3,4),(3,8),\\ (5,2),(5,4),(5,6),(5,8),(7,2),(7,4),(7,6),(7,8)\}$$

Para construir una matriz que represente la relación R se piensa en una tabla cuyas filas son los elementos de A y cuyas columnas están constituidas por los elementos de B, es decir:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 2 & 4 & 6 & 8 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{array} & \begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{pmatrix} \end{array}$$

Solución del ejemplo 4.7

La matriz se completa ahora, preguntando si $a_i R b_j$, con $a_i = i$, $i \in A = \{1, 3, 5, 7\}$ y $b_j = j$, $j \in B = \{2, 4, 6, 8\}$. En caso de que $a_i R b_j$ se coloca un 1 en la entrada m_{ij} de la matriz y un 0 si ocurre lo contrario. Por lo cual:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz M_R contiene únicamente un 0 pues en esta relación binaria solo se excluye de $A \times B$ el par ordenado $(3, 6)$, todos los demás, sí pertenecen a R.

Nota

Una matriz que representa a una relación binaria no necesariamente es única. Al cambiar el orden de los elementos en los conjuntos A y B se produce una permuta en el orden de las entradas dentro del arreglo bidimensional y algunas veces, esto genera una matriz distinta. En este ejercicio, si se toma por ejemplo:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 2 & 4 & 6 & 8 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \end{array} & \left(\begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array}\right) \end{array}$$

Nota

Se obtiene una matriz representativa diferente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución del ejemplo 4.7

La librería **VilCretas** cuenta con la setencia `MatrizRelBin` encargada de devolver una matriz de representación asociada a una relación binaria recibida por medio del conjunto de pares ordenados que la determinan. En *Mathematica* las siguientes líneas de código construyen a M_R:

In[ ] :=

```
A = {1, 3, 5, 7};
B = {2, 4, 6, 8};
R = RelBin["GCD[a,b]==1", A, B];
MatrizRelBin[R, A, B]
```

Out[ ] =

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-74.zip

Explicación en video

https://youtu.be/FLyHvlme0rg

Example (4.8)

Encuentre por medio del software *Wolfram Mathematica* una matriz que represente la relación binaria del ejemplo 8.

Solución del ejemplo 4.8

Recordando, en el ejemplo 8:

$$aRb \Leftrightarrow b^3 \geq a \text{ con } a, b \in A = \{1, 3, 5, \ldots, 99\}$$

El conjunto A tiene 50 elementos, en consecuencia, el tamaño de una matriz M_R que representa a la relación R es $50 \cdot 50 = 2500$ entradas. Hallar esta matriz manualmente no tiene viabilidad razonable por sus dimensiones. Luego, al recurrir a la instrucción `MatrizRelBin`:

In[ ] :=

```
A = Range[1, 99, 2];
R = RelBin["b^3>=a", A, A];
MatrizRelBin[R, A, A]
```

El **Out[ ]** vinculado con este **In[ ]**, no se compartirá con el lector, al ser una matriz como ya se señaló, de 2500 entradas.

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-75.zip

- Las relaciones binarias definidas sobre un conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, también se pueden representar de una manera gráfica por medio de lo que se denomina un "grafo" y más aún, un "digrafo". Esta gráfica existe únicamente en relaciones binarias homogéneas.

Si los n elementos de $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se interpretan en un plano como vértices (puntos o nodos) y por cada par ordenado (a_i, a_j) de una relación se dibuja una flecha dirigida que une a_i con a_j, en ese orden estricto, entonces la gráfica obtenida, representa a la relación binaria, con $i, j \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$. Esta gráfica se denomina "digrafo" o "grafo dirigido" de la relación.

- Consideremos algunos ejemplos.

Example (4.9)

Representе por medio de un digrafo la relación binaria $R = \{(a, b) \mid a + b \geq 6\}$ definida sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Solución del ejemplo 4.9

Lo primero que se debe realizar para solucionar este ejercicio es encontrar explícitamente cada uno de los pares ordenados de la relación R. Si se usa el comando `RelBin` se tiene:

In[ ] :=

```
A = Range[5];
R = RelBin["a+b>=6", A, A]
```

Out[ ] =

{{1, 5}, {2, 4}, {2, 5}, {3, 3}, {3, 4}, {3, 5}, {4, 2}, {4, 3}, {4, 4}, {4, 5}, {5, 1}, {5, 2}, {5, 3}, {5, 4}, {5, 5}}

Solución del ejemplo 4.9

Como ya se explicó, un digrafo que representa a R se construye en este caso, dibujando en el plano cinco puntos etiquetados con los elementos del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y trazando luego, una flecha dirigida de "a" a "b" por cada par ordenado (a, b) de la relación binaria R, ya hallada por extensión. Esto produce lo que se muestra en la figura 3.

La librería **VilCretas** facilita la sentencia `GrafoRelBin` que elabora un grafo de representación de una relación binaria homogénea. Al emplear `GrafoRelBin` en el contexto del presente ejemplo:

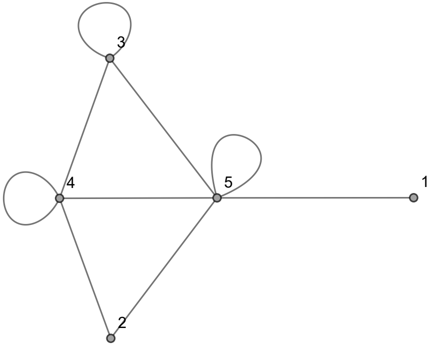
In[ ] :=

```
GrafoRelBin[R, A]
```

Solución del ejemplo 4.9

Se obtiene la siguiente salida:

Out[ ] =



Solución del ejemplo 4.9

El grafo de esta salida es no dirigido. En él, cada arista no dirigida debe interpretarse como dos flechas en direcciones opuestas. Si el estudiante cambia mentalmente todas aristas "a •–• b" de esta gráfica por "$a \leftrightarrow b$", $a, b \in A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, se obtiene el grafo compartido en la figura 3.

Nota

La instrucción `GrafoRelBin` devuelve como salida un grafo no dirigido cuando la relación binaria R que representa, satisface: $aRb \Rightarrow bRa$. Como veremos más adelante, si una relación R cumple con esta propiedad se llama "relación simétrica".

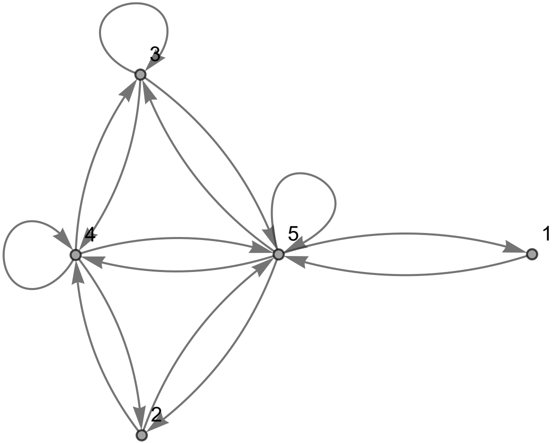


Figura: Digrafo de la relación binaria $aRb \Leftrightarrow a+b \geq 6,\ a,\ b \in A = \{1,2,3,4,5\}$

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-76.zip

Explicación en video

https://youtu.be/V_rTe42SuzA

Example (4.10)

Sea $A = \{2, 4, \ldots, 100\}$ y R la relación binaria definida sobre A, donde: $aRb \Leftrightarrow a = b^k$, $k \in \mathbb{N}$. Grafique R por medio de un digrafo.

Solución del ejemplo 4.10

Al igual que en el ejemplo 12, inicialmente corresponde encontrar de forma explícita los pares ordenados de la relación binaria R. Es natural para esta tarea, pensar en el uso de la setencia `RelBin`.

Nota

El comando `RelBin` posee una restricción sintáctica que no se había señalado antes. La condición o condiciones de construcción de la relación binaria R que recibe `RelBin` como parámetro, únicamente puede depender de las variables "a" y "b". En este ejemplo, el criterio de R ($a = b^k$) está en función de tres variables "a", "b" y "k", por lo que, si se escribe literalmente esta condición dentro de la instrucción `RelBin` retornará el conjunto vacío.

Solución del ejemplo 4.10

¿Qué se debe hacer entonces para poder emplear exitosamente la sentencia `RelBin?`, se hace necesario reformular la condición de la relación binaria haciéndola depender solamente de "a" y "b", esto se puede lograr despejando la variable "k" de $a = b^k$:

$$a = b^k \Rightarrow \ln a = \ln b^k \Rightarrow \ln a = k \ln b \Rightarrow k = \frac{\ln a}{\ln b}$$

Solución del ejemplo 4.10

Es decir, si aRb necesariamente se cumple $k = \frac{\ln a}{\ln b} = \log_b a$, $k \in \mathbb{N}$. De esta forma, un par ordenado (a, b) estará en R, si $\log_b a$ da como resultado un entero positivo. A este respecto, *Wolfram Mathematica* provee un comando booleano que verifica si su argumento es un número entero, la sentencia se llama `IntegerQ`. Por consiguiente, la expresión `IntegerQ[Log[b,a]]` constituye el "string" a colocar dentro del `RelBin` si se desea hallar por extensión la relación R. En el software:

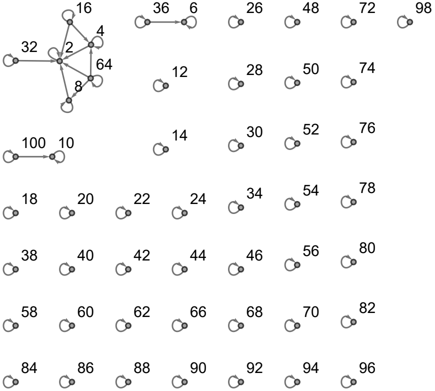
In[ ] :=

```
A = Range[2, 100, 2];
R = RelBin["IntegerQ[Log[b,a]]", A, A];
GrafoRelBin[R, A]
```

Solución del ejemplo 4.10

Se obtiene la siguiente salida:

Out[ ] =



Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-77.zip

- Las relaciones binarias poseen distintos tipos de operaciones. La siguiente sección aborda este importante tema.

Operaciones con relaciones binarias

Prof. Enrique Vílchez Quesada

Universidad Nacional de Costa Rica

Definición 4.4

- Iniciaremos introduciendo las operaciones de unión, intersección y complemento de relaciones.

Definition (4.4)

Sean R_1 y R_2 relaciones binarias definidas de A en B. Entonces:

1. La relación unión entre R_1 y R_2 denotada $R_1 \cup R_2$ es tal que: $a\,(R_1 \cup R_2)\,b$ sí y solo sí aR_1b, o bien, aR_2b.
2. La relación intersección de R_1 y R_2 denotada $R_1 \cap R_2$ se define como: $a\,(R_1 \cap R_2)\,b$ sí y solo sí aR_1b y aR_2b.
3. La relación complemento de R_1 con notación $\overline{R_1}$ corresponde a: $a\overline{R_1}b$ sí y solo sí aRb.

Comentario sobre la definición 14

Al recordar las operaciones de unión, intersección y complemento entre conjuntos, se observa que lo descrito en la definición 14 responde a esas operaciones. Específicamente para la operación complemento el conjunto universal a utilizar siempre es $A \times B$. El alumno debe recordar que una relación binaria es un conjunto de pares ordenados, razón por la cual, tiene sentido unir, intersecar y calcular el complemento en relaciones binarias tal y como se realiza de acuerdo con la teoría de conjuntos.

Example (4.11)

Determine las relaciones unión e intersección entre R_1 y R_2, si
$R_1 = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,2),(3,3),(4,3)\}$ y
$R_2 = \{(a,b) \mid a - b = 1\}$ definidas sobre $A = \{1,2,3,4,5\}$. Halle, además, $\overline{R_2}$. Resuelva las mismas operaciones si $A = \{1,2,3,\ldots,100\}$.

Solución del ejemplo 4.11

La relación R_2 por extensión viene dada por:

In[ ] :=

```
A = Range[5];
R2 = RelBin["a-b==1", A, A]
```

Out[ ] =

{{2, 1}, {3, 2}, {4, 3}, {5, 4}}

Luego, $R_1 \cup R_2$ consiste en unir en un solo conjunto los pares ordenados de cada una de las relaciones binarias y $R_1 \cap R_2$ se forma al tomar los pares ordenados que ambas relaciones tienen en común, es decir:

$$R_1 \cup R_2 = \{(1,1)\,,(2,1)\,,(2,2)\,,(3,2)\,,(3,3)\,,(4,3)\,,(5,4)\}$$
$$R_1 \cap R_2 = \{(2,1)\,,(3,2)\,,(4,3)\}$$

Solución del ejemplo 4.11

Por otra parte, con respecto a la relación complementaria de R_2, al usar teoría de conjuntos:

$$\overline{R_2} = A \times A - R_2$$

$A \times A$ se puede calcular mediante la instrucción `PC`:

In[ ] :=

```
PC[Range[5], Range[5]]
```

Out[ ] =

{{1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {2, 1}, {2, 2}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {3, 1}, {3, 2}, {3, 3}, {3, 4}, {3, 5}, {4, 1}, {4, 2}, {4, 3}, {4, 4}, {4, 5}, {5, 1}, {5, 2}, {5, 3}, {5, 4}, {5, 5}}

Solución del ejemplo 4.11

Al eliminar de $A \times A$ los pares de la relación R_2, se concluye:

$$\overline{R_2} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,3),(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,4),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,5)\}$$

Si se desea ahora, efectuar las mismas operaciones asumiendo que $A = \{1,2,3,\ldots,100\}$ es aconsejable el uso de software por la cantidad de elementos que posee A. *Wolfram Mathematica* presenta los comandos `Union`, `Intersection` y `Complement` que ejecutan las operaciones entre conjuntos unión, intersección y complemento, respectivamente.

Solución del ejemplo 4.11

Luego:

In[ ] :=

```
A = Range[100];
R1 = {{1, 1}, {2, 1}, {2, 2}, {3, 2}, {3, 3}, {4, 3}};
R2 = RelBin["a-b==1", A, A]
Union[R1, R2]
Intersection[R1, R2]
Complement[PC[A, A], R2]
```

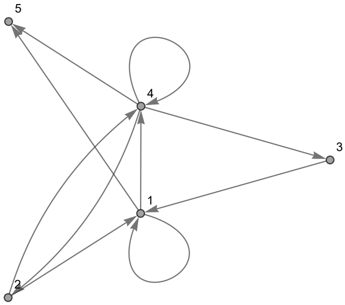
El conjunto universal en la instrucción `Complement` se escribe como el primer argumento que recibe esa sentencia. Por razones de espacio en este texto, no se mostrará la salida de las operaciones implementadas. Sin embargo, se invita al lector a correr el código anterior y analizar los resultados utilizando el archivo de respaldo señalado a continuación.

Descargue un archivo

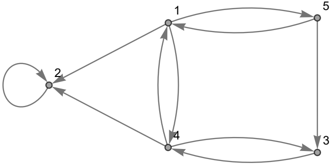
https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-78.zip

Example (4.12)

Considere las gráficas de dos relaciones R_1 y R_2 definidas sobre $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Encuentre: $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$ y $\overline{R_1}$.



R_1



R_2

Solución del ejemplo 4.12

Los digrafos del enunciado en este ejemplo, permiten extraer cada uno de los pares ordenados que caracterizan a las relaciones R_1 y R_2. Una flecha que une a con b en esa dirección, indica la presencia del par ordenado (a, b) en la relación binaria correspondiente, siendo a, $b \in A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Esto nos faculta a afirmar que:

$$R_1 = \{(1,1), (1,4), (1,5), (2,1), (2,4), (3,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5)\}$$

Y:

$$R_2 = \{(1,2), (1,4), (1,5), (2,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,3)\}$$

Solución del ejemplo 4.12

Usando los conceptos de unión e intersección de conjuntos, se tiene:

$$R_1 \cup R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,4), (3,1), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,3)\}$$

$$R_1 \cap R_2 = \{(1,4), (1,5), (4,2), (4,3)\}$$

Solución del ejemplo 4.12

Además, empleando ahora, la definición de complemento de un conjunto:

$$\overline{R_1} = A \times A - R_1$$
$$= \left\{\boxed{(1,1)}, (1,2), (1,3), \boxed{(1,4)}, \boxed{(1,5)}, \boxed{(2,1)}, (2,2), (2,3),\right.$$
$$\boxed{(2,4)}, (2,5), \boxed{(3,1)}, (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,1),$$
$$\boxed{(4,2)}, \boxed{(4,3)}, \boxed{(4,4)}, \boxed{(4,5)},$$
$$\left.(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)\right\}$$
$$-R_1 = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (2,5), (3,2), (3,3), (3,4),$$
$$(3,5), (4,1), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)\}$$

Solución del ejemplo 4.12

Los cálculos, también, se podrían realizar a través del uso del software *Mathematica*:

In[ ] :=

```
A = Range[5];
R1 = {{1, 1}, {1, 4}, {1, 5}, {2, 1}, {2, 4}, {3, 1},
{4, 2}, {4, 3}, {4, 4}, {4, 5}};
R2 = {{1, 2}, {1, 4}, {1, 5}, {2, 2}, {3, 4}, {4, 1},
{4, 2}, {4, 3}, {5, 1}, {5, 3}};
Union[R1, R2]
Intersection[R1, R2]
Complement[PC[A, A], R1]
```

Solución del ejemplo 4.12

Se obtiene la siguiente salida:
Out[ ] =

{{1, 1}, {1, 2}, {1, 4}, {1, 5}, {2, 1}, {2, 2}, {2, 4}, {3, 1}, {3, 4}, {4, 1}, {4, 2}, {4, 3}, {4, 4}, {4, 5}, {5, 1}, {5, 3}}
{{1, 4}, {1, 5}, {4, 2}, {4, 3}}
{{1, 2}, {1, 3}, {2, 2}, {2, 3}, {2, 5}, {3, 2}, {3, 3}, {3, 4}, {3, 5}, {4, 1}, {5, 1}, {5, 2}, {5, 3}, {5, 4}, {5, 5}}
En el **Out[ ]**, el primer conjunto de pares ordenados es el resultado de $R_1 \cup R_2$, el segundo conjunto corresponde a $R_1 \cap R_2$ y el tercero, brinda la respuesta de $\overline{R_1}$.

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-79.zip

El estudiante debe tener presente, observando los distintos ejemplos ya compartidos, que una relación binaria puede venir dada de varias formas:

- De manera explícita cuando se conocen de previo cuáles son sus pares ordenados.
- Mediante una condición o condiciones que la determinan (uso de `RelBin`).
- A través de una matriz o arreglo bidimensional.
- Usando un digrafo si la relación binaria es homogénea.

Definición 4.5

Otra operación de importancia sobre una relación binaria consiste en determinar su inversa.

Definition (4.5)

Sea R una relación de A a B, con A y B conjuntos distintos de vacío. Se llama relación inversa de R y se representa como R^{-1}, a la relación definida de B a A, tal que: $bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb$.

Comentario sobre la definición 17

De acuerdo con la definición 17, la relación inversa R^{-1} de una relación binaria R, se encuentra "dando vuelta" a las coordenadas (a, b) de cada uno de los pares ordenados que conforman a R, así, si
$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R^{-1}$.

Example (4.13)

Halle R^{-1} si $R = \left\{(a, b) \mid a^2 + b = 200\right\}$ con a, $b \in A = \{1, 2, 3, \ldots, 300\}$.

Solución del ejemplo 4.13

La relación binaria R^{-1} se determina como ya se mencionó, dándole vuelta a las componentes de cada uno de los pares ordenados de la relación R. R se puede encontrar por extensión utilizando el comando `RelBin`:

In[ ] :=

```
A = Range[300];
R = RelBin["a^2+b==200", A, A]
```

Out[ ] =

{{1, 199}, {2, 196}, {3, 191}, {4, 184}, {5, 175}, {6, 164}, {7, 151}, {8, 136}, {9, 119}, {10, 100}, {11, 79}, {12, 56}, {13, 31}, {14, 4}}

Solución del ejemplo 4.13

En consecuencia:

$$R = \{(1,199), (2,196), (3,191), (4,184), (5,175), (6,164), (7,151), (8,136), (9,119), (10,100), (11,79), (12,56), (13,31), (14,4)\}$$

Al invertir el orden de las componentes en los pares ordenados de R queda determinada la relación R^{-1} :

$$R^{-1} = \{(199,1), (196,2), (191,3), (184,4), (175,5), (164,6), (151,7), (136,8), (119,9), (100,10), (79,11), (56,12), (31,13), (4,14)\}$$

Solución del ejemplo 4.13

Este proceso se automatiza en *Wolfram* empleando la instrucción `Reverse`. `Reverse` es un comando de *Mathematica* que invierte el orden de una lista de datos que se le pasa como argumento. Si ese parámetro corresponde a un par ordenado, `Reverse`, le da vuelta al par. Luego:

In[ ] :=

```
A = Range[300];
R = RelBin["a^2+b==200", A, A];
Reverse /@ R
```

Out[ ] =

$\{\{199, 1\}, \{196, 2\}, \{191, 3\}, \{184, 4\}, \{175, 5\}, \{164, 6\}, \{151, 7\}, \{136, 8\}, \{119, 9\}, \{100, 10\}, \{79, 11\}, \{56, 12\}, \{31, 13\}, \{4, 14\}\}$

Solución del ejemplo 4.13

En el **In[ ]**, el código `/@`, invoca otra sentencia de *Wolfram* llamada `Map`. `Reverse /@ R` produce como salida lo mismo que la ejecución de `Map[Reverse, R]`. La función `Map` le indica a *Mathematica* que aplique el `Reverse` a cada uno de los elementos de `R`.

Nota

Si no se hubiese recurrido al empleo de `/@` (`Map`), `Reverse` no tendría el efecto deseado pues daría vuelta a la lista de pares ordenados y no a las componentes de cada uno de los pares.

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-80.zip

Definición 4.6

La composición de relaciones binarias constituye una operación más entre este tipo de conjuntos.

Definition (4.6)

Sea R_2 una relación de A a B y R_1 otra de B a C. La relación composición $R_1 o R_2$ se define de A a C y es tal que:

$$a\left(R_1 o R_2\right) c \Leftrightarrow \exists b,\ b \in B, \text{ donde } aR_2 b \text{ y } bR_1 c$$

Comentario sobre la definición 19

La composición de relaciones binarias según la definición 19, se puede representar esquemáticamente así:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "aR_2b"] \arrow[rr, bend right, "a(R_1oR_2)c"'] & B \arrow[r, "bR_1c"] & C \end{tikzcd}$$

En esta definición se aprecia la tarea exhaustiva que implica encontrar la composición de dos relaciones binarias por ese camino, pues hay que buscar para cada par ordenado (a, b) de R_2, todos los pares en la relación R_1 que inicien con b. Al encontrar $(b, c) \in R_1$, el par ordenado (a, c) será un elemento de la relación R_1oR_2. Por este motivo, usualmente la composición de relaciones es una operación que se efectuará mediante el uso de matrices booleanas tal y como lo garantiza el teorema 23 expuesto más adelante.

Se abordará, por lo pronto, un ejemplo de la operación composición usando la definición 19.

Example (4.14)

Calcule $R_1 o R_2$ si $R_1 = \{(a, b) \mid a > b\}$ y $R_2 = \{(a, b) \mid a < b\}$ con a, $b \in A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Solución del ejemplo 4.14

`RelBin` retorna por extensión las relaciones binarias R_1 y R_2 :

In[ ] :=

```
A = Range[4];
R1 = RelBin["a>b", A, A]
R2 = RelBin["a<b", A, A]
```

Out[ ] =

{{2, 1}, {3, 1}, {3, 2}, {4, 1}, {4, 2}, {4, 3}}
{{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}}
De donde:

$$R_1 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$$
$$R_2 = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$$

Solución del ejemplo 4.14

Si ahora se requiere hallar los pares ordenados de la composición $R_1 o R_2$, se inicia tomando el primer par $(1,2)$ de R_2 y se observa cuáles pares ordenados de la relación R_1 inician con 2, es decir:

$$R_1 = \left\{ \boxed{(2,1)}, (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3) \right\}$$

Por lo que, si $1 R_2 2$ y $2 R_1 1$ se concluye que $1 \left(R_1 o R_2\right) 1$. Se selecciona el segundo par $(1,3)$ de R_2 y se visualizan cuáles pares ordenados de R_1 comienzan con 3 :

$$R_1 = \left\{ (2,1), \boxed{(3,1)}, \boxed{(3,2)}, (4,1), (4,2), (4,3) \right\} \tag{3}$$

Solución del ejemplo 4.14

En cuyo caso, $(1,1),(1,2) \in R_1 o R_2$. Si se extrae el tercer par $(1,4)$ de R_2 y se seleccionan los pares de R_1 que inician con 4, se tiene:

$$R_1 = \left\{(2,1),(3,1),(3,2),\boxed{(4,1)},\boxed{(4,2)},\boxed{(4,3)}\right\} \tag{4}$$

En consecuencia, $(1,1),(1,2),(1,3) \in R_1 o R_2$. Si ahora se extrae el cuarto par $(2,3)$ de la relación R_2 es necesario observar en R_1 los pares ordenados que comienzan con 3. Esto ya se efectuó en 3, por lo tanto, $(2,1),(2,2) \in R_1 o R_2$. Se toma el quinto par ordenado $(2,4)$ de R_2 y se visualizan los pares de R_1 que inician con 4, esto quedó expresado en 4, concluyéndose que $(2,1)$, $(2,2)$ y $(2,3)$ están en la relación composición buscada.

Solución del ejemplo 4.14

Finalmente, si se escoge el sexto par $(3,4)$ de R_2 y se observan los pares ordenados en R_1 que inician con 4 (ver 4), se infiere $3\,(R_1 o R_2)\,1$, $3\,(R_1 o R_2)\,2$ y $3\,(R_1 o R_2)\,3$. A razón de todo lo anterior:

$$R_1 o R_2 = \{(1,1)\,,(1,2)\,,(1,3)\,,(2,1)\,,(2,2)\,,(2,3)\,,(3,1)\,,(3,2)\,,(3,3)\} \tag{5}$$

Nota

El procedimiento por definición de composición de relaciones binarias es muy extenuante. A pesar de ser este ejemplo relativamente pequeño en cuanto a la cantidad de pares ordenados en cada una de las relaciones binarias involucradas, se ha podido evidenciar un número significativo de casos, al recorrer cada par ordenado (a, b) de R_2 y buscar todos los pares en R_1 cuya primera coordenada fuera igual a b.

Solución del ejemplo 4.14

En *Wolfram Language* un método que automatiza el cálculo por definición de la relación composición es el siguiente:

```
RelacionComposicion[R1_, R2_]:=Module[{Composicion = {},
i, j}, For[i = 1, i <= Length[R2], For[j = 1, j <=
Length[R1], If[R2[[i, 2]] == R1[[j, 1]], Composicion =
Append[Composicion, {R2[[i, 1]], R1[[j, 2]]}]]; j++]; i++];
DeleteDuplicates[Composicion]]
```

`DeleteDuplicates` es un comando de *Mathematica* encargado de eliminar elementos duplicados en un conjunto. Dentro de `RelacionComposicion` elimina los pares ordenados que han quedado repetidos al usar la definición 19.

Solución del ejemplo 4.14

Luego, si se emplea la función `RelacionComposicion` con las relaciones R_1 y R_2 del presente ejemplo:

In[ ] :=

```
A = Range[4];
R1 = RelBin["a>b", A, A];
R2 = RelBin["a<b", A, A];
RelacionComposicion[R1, R2]
```

Out[ ] =

$\{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 1\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{3, 2\}, \{3, 3\}\}$

Verificándose la respuesta 5.

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-81.zip

Definición 4.7

Definition (4.7)

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices booleanas, entonces:

1. Si A y B son de tamaño $n \times m$, la unión booleana denotada $A \vee B$, se define como la matriz booleana $C = (c_{ij})$ de dimensiones $n \times m$, tal que:
$$c_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } a_{ij} = 1 \text{ o } b_{ij} = 1 \\ 0 \text{ si } a_{ij} = 0 \text{ y } b_{ij} = 0 \end{cases}$$
2. Si A y B son de tamaño $n \times m$, la intersección booleana denotada $A \wedge B$, se define como la matriz booleana $C = (c_{ij})$ de dimensiones $n \times m$, tal que:
$$c_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } a_{ij} = 1 \text{ y } b_{ij} = 1 \\ 0 \text{ si } a_{ij} = 0 \text{ o } b_{ij} = 0 \end{cases}$$

Continuación de la definición 4.7

3. El complemento booleano de A, A de tamaño $n \times m$, representado por $\overline{A}$ es una matriz booleana $n \times m$, $C = (c_{ij})$ donde si $a_{ij} = 1$ la entrada $c_{ij} = 0$ y viceversa, si $a_{ij} = 0$ la entrada $c_{ij} = 1$.
4. Si A es de tamaño $n \times p$ y B es de tamaño $p \times m$, el producto booleano entre A y B, denotado $A \odot B$ es la matriz $C = (c_{ij})$ de dimensiones $n \times m$ con:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } a_{ik} = 1 \text{ y } b_{kj} = 1, \text{ para algún } k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq p \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

Comentario sobre la definición 21

Las operaciones unión, intersección y complemento booleano están relacionadas con las conectivas en lógica proposicional: disyunción, conjunción y negación, respectivamente. De hecho, la tabla de verdad correspondiente a cada conectiva lógica constituye el fundamento teórico para realizar el cálculo de estas operaciones booleanas, interpretando 1 como True y 0 como False. Estas tablas se recuerdan al lector, a continuación:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	$\neg p$
1	0
0	1

(6)

Comentario sobre la definición 21

Por otra parte, al estudiante podría ocasionarle cierta confusión la operación multiplicación booleana de matrices booleanas. El producto convencional de matrices plantea que la entrada c_{ij} de la multiplicación viene dada por:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

En el producto booleano, en lugar de multiplicar a_{ik} con b_{kj}, se comparan ambas entradas. Si al menos un par de ellas son iguales a 1 entonces c_{ij} da como resultado 1 y en caso contrario, c_{ij} es igual a 0.

Example (4.15)

Calcule $A \vee B$, $A \wedge B$, $\overline{A}$, $A \odot B$ y $B \odot A$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución del ejemplo 4.15

Por la definición 21:

$$A \vee B = \begin{pmatrix} 1\vee 0 & 0\vee 0 & 0\vee 1 & 0\vee 0 \\ 1\vee 0 & 1\vee 1 & 0\vee 0 & 0\vee 1 \\ 1\vee 1 & 0\vee 0 & 1\vee 1 & 1\vee 0 \\ 0\vee 1 & 1\vee 0 & 0\vee 1 & 0\vee 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \wedge B = \begin{pmatrix} 1\wedge 0 & 0\wedge 0 & 0\wedge 1 & 0\wedge 0 \\ 1\wedge 0 & 1\wedge 1 & 0\wedge 0 & 0\wedge 1 \\ 1\wedge 1 & 0\wedge 0 & 1\wedge 1 & 1\wedge 0 \\ 0\wedge 1 & 1\wedge 0 & 0\wedge 1 & 0\wedge 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución del ejemplo 4.15

Los resultados anteriores se justifican por las tablas de verdad compartidas en 6. Con relación al producto booleano $A \odot B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\ (a_{11} = b_{13} = 1) & 0 \\ 0 & 1\ (a_{22} = b_{22} = 1) & 1\ (a_{21} = b_{13} = 1) & 1\ (a_{22} = b_{24} = 1) \\ 1\ (a_{33} = b_{31} = 1) & 0 & 1\ (a_{31} = b_{13} = 1) & 1\ (a_{34} = b_{44} = 1) \\ 0 & 1\ (a_{42} = b_{22} = 1) & 0 & 1\ (a_{42} = b_{24} = 1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución del ejemplo 4.15

Además, $B \odot A$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \ (b_{13} = a_{31} = 1) & 0 & 1 \ (b_{13} = a_{33} = 1) & 1 \ (b_{13} = a_{34} = 1) \\ 1 \ (b_{22} = a_{21} = 1) & 1 \ (b_{22} = a_{22} = 1) & 0 & 0 \\ 1 \ (b_{31} = a_{11} = 1) & 0 & 1 \ (b_{33} = a_{33} = 1) & 1 \ (b_{33} = a_{34} = 1) \\ 1 \ (b_{41} = a_{11} = 1) & 1 \ (b_{44} = a_{42} = 1) & 1 \ (b_{43} = a_{33} = 1) & 1 \ (b_{43} = a_{34} = 1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota

El alumno debe tener en cuenta visualizando el cálculo de $A \odot B$ y $B \odot A$, que $A \odot B$ no es necesariamente igual a $B \odot A$, de hecho en este ejemplo, $A \odot B \neq B \odot A$. El producto booleano, como consecuencia, no es una operación conmutativa, tal y como ocurre también, con la multiplicación convencional de matrices.

Solución del ejemplo 4.15

En *Wolfram Mathematica* las operaciones booleanas: unión, intersección, complemento y producto, se ejecutan empleando los comandos de la librería **VilCretas**: `UnionBooleana`, `InterseccionBooleana`, `ComplementoBooleano` y `ProductoBooleano`, respectivamente.
Antes de mostrar su uso se aclarará al alumno cómo se crea una matriz en el software *Mathematica*. Para ello, se recurre al menú del programa: **Insertar/ Tabla/Matriz /Nuevo**. Esto abre la ventana que se muestra en la figura 4, donde en "Make" se escoge "Matrix" y en los campos de texto "Number of rows" y "Number of columns" se detallan las dimensiones de la matriz. Al presionar "OK", el software coloca en el *notebook* una estructura rectangular (ver figura 5) con una serie de casillas vacías a completar con las entradas del arreglo bidimensional. Si se presiona la tecla "Tab" es posible navegar más rápidamente de una casilla a otra.

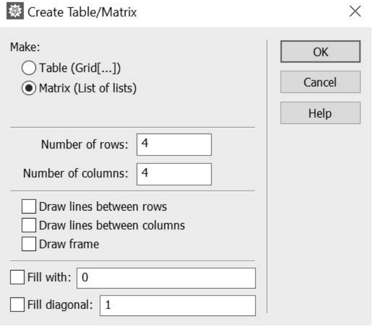


Figura: Ventana de *Mathematica* para la creación de una matriz

$$\begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

Figura: Ejemplo de salida del menú **Insertar/ Tabla/Matriz /Nuevo**

Solución del ejemplo 4.15

Creando en *Wolfram Mathematica* las matrices A y B:

In[ ] :=

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

```
UnionBooleana[A, B]
InterseccionBooleana[A, B]
ComplementoBooleano[A]
ProductoBooleano[A, B]
ProductoBooleano[B, A]
```

Solución del ejemplo 4.15

Se obtiene la siguiente salida:

Out[ ] =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución del ejemplo 4.15

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta manera, se corroboran todas las respuestas calculadas manualmente en el ejemplo.

Nota

El paquete **VilCretas** posee, además, la instrucción `CDFOperacionesMBooleanas` que recibe como parámetros dos matrices booleanas A y B, retornando como salida el cálculo de las operaciones $A \vee B$, $A \wedge B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \odot B$ y $B \odot A$. Se invita al alumno a explorar la herramienta como un recurso de verificación de resultados. También, el *CDF* generado por `CDFOperacionesMBooleanas` se encuentra disponible en la descarga que prosigue.

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/CDFs/Operaciones_booleanas.cdf.zip

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-82.zip

Explicación en video

https://youtu.be/0ifRfJEfqbE

- El teorema expuesto a continuación, permite realizar las cinco operaciones con relaciones binarias: unión, intersección, complemento, inversa y composición, a partir de las operaciones con matrices booleanas establecidas en la definición 21. Veamos.

Teorema 4.1

Theorem (4.1)

Sean A, B y C conjuntos distintos de vacío y, R_1 y R_2 relaciones binarias de A a B con matrices representativas M_{R_1} y M_{R_2}, respectivamente, entonces:

1. $M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2}$.
2. $M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2}$.
3. $M_{\overline{R_1}} = \overline{M_{R_1}}$.
4. $M_{R_1^{-1}} = (M_{R_1})^t$.
5. $M_{R_1 o R_2} = M_{R_2} \odot M_{R_1}$ *asumiendo R_2 definida de A a B y R_1 de B a C.*

Comentario sobre el teorema 23

En el teorema 23 la notación $(M_{R_1})^t$ representa la matriz transpuesta de M_{R_1}. La transpuesta de una matriz, como el estudiante preverá, se obtiene al cambiar filas por columnas, es decir, se le “da vuelta” a la matriz original.

Además, resulta importante destacar en la propiedad 5 del teorema 23 el orden invertido que se le brinda a las matrices en el producto booleano. Si el interés es calcular la matriz de la relación composición $R_1 o R_2$, en la multiplicación booleana se toma primero la matriz de la relación que aparece de segunda en la composición (M_{R_2}) producto booleano con la matriz de la relación que aparece de primera (M_{R_1}).

Comentario sobre el teorema 23

Respetar ese orden resulta esencial pues tal y como se mencionó en la página 140, esta operación no es conmutativa por lo que el orden de las matrices M_{R_1} y M_{R_2} en la multiplicación booleana, sí interesa.
Las propiedades enunciadas en el teorema 23, facilitan el cálculo de un conjunto de matrices que representan las relaciones: unión, intersección, complemento, inversa y composición. Aunque por medio del teorema no se hallan directamente estas relaciones binarias, teniendo su matriz de representación es relativamente sencillo encontrar los pares ordenados que las caracterizan.

Consideremos el siguiente ejemplo.

Example (4.16)

Sean dos relaciones binarias R_1 y R_2 definidas sobre $A = \{a, b, c, d\}$ y sus matrices de representación:

$$M_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_{R_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $\overline{R_1}$, R_1^{-1} y $R_1 o R_2$. Construya, además, un digrafo para $R_1 o R_2$.

Solución del ejemplo 4.16

Las matrices representativas M_{R_1} y M_{R_2} son iguales a las matrices A y B del ejemplo 22, de forma correspondiente. De acuerdo con ello, a las propiedades enunciadas en el teorema 23 y a los cálculos del ejemplo 22, se tiene que:

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución del ejemplo 4.16

$$M_{\overline{R_1}} = \overline{M_{R_1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{R_1^{-1}} = (M_{R_1})^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{R_1 o R_2} = M_{R_2} \odot M_{R_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución del ejemplo 4.16

De donde:

$$M_{R_1\cup R_2} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow R_1 \cup R_2 = \{(a,a), (a,c), (b,a), (b,b), (b,d), (c,a), (c,c), (c,d), (d,a), (d,b), (d,c), (d,d)\}$

$$M_{R_1\cap R_2} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow R_1 \cap R_2 = \{(b,b), (c,a), (c,c)\}$

Solución del ejemplo 4.16

$$M_{\overline{R_1}} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow \overline{R_1} =$
$\{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,b),(d,a),(d,c),(d,d)\}$

$$M_{R_1^{-1}} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow R_1^{-1} = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,d),(c,c),(d,c)\}$

Solución del ejemplo 4.16

$$M_{R_1 o R_2} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow$ $R_1 o R_2 = \{(a,a),(a,c),(a,d),(b,a),(b,b),(c,a),(c,c),(c,d),(d,a),(d,b),(d,c),(d,d)\}$

En *Wolfram* el ejemplo se resolvería como sigue:

Solución del ejemplo 4.16

In[ ] :=

$$\text{MR1=}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{MR2=}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

```
A = {a, b, c, d};
RelBinMatriz[UnionBooleana[MR1, MR2][[1]], A, A]
RelBinMatriz[InterseccionBooleana[MR1, MR2][[1]], A, A]
RelBinMatriz[ComplementoBooleano[MR1][[1]], A, A]
RelBinMatriz[Transpose[MR1], A, A]
RelBinMatriz[ProductoBooleano[MR2, MR1][[1]], A, A]
```

Solución del ejemplo 4.16

Se obtiene la siguiente salida:

Out[ ] =

{{a, a}, {a, c}, {b, a}, {b, b}, {b, d}, {c, a}, {c, c}, {c, d}, {d, a}, {d, b}, {d, c}, {d, d}}
{{b, b}, {c, a}, {c, c}}
{{a, b}, {a, c}, {a, d}, {b, c}, {b, d}, {c, b}, {d, a}, {d, c}, {d, d}}
{{a, a}, {a, b}, {a, c}, {b, b}, {b, d}, {c, c}, {d, c}}
{{a, a}, {a, c}, {a, d}, {b, a}, {b, b}, {c, a}, {c, c}, {c, d}, {d, a}, {d, b}, {d, c}, {d, d}}

Nota

El comando `Transpose` utilizado en el **In[ ]** anterior es una instrucción de *Mathematica* que calcula la transpuesta de una matriz. La sentencia `RelBinMatriz` constituye un comando del paquete **VilCretas**, donde al recibir una matriz de representación de una relación binaria, construye sus pares ordenados, especificando además, los conjuntos sobre los cuales está definida la relación. Un aspecto de interés que el estudiante debe observar en el código, consiste en haber incluido `[[1]]` al final de las instrucciones `UnionBooleana`, `InterseccionBooleana`, `ComplementoBooleano` y `ProductoBooleano`. Esto se ha realizado pues los comandos citados devuelven un arreglo rectangular concerniente a la unión, intersección, complemento y producto booleano.

Nota

En *Wolfram* esa estructura rectangular no es una matriz. Al colocar `[[1]]` se está extrayendo de cada arreglo rectangular lo que para *Mathematica* sintácticamente sí conforma una matriz. Por ejemplo, en este ejercicio la salida de `UnionBooleana[MR1, MR2][[1]]`, corresponde a:

$$\{\{1,0,1,0\},\{1,1,0,1\},\{1,0,1,1\},\{1,1,1,1\}\}$$

Es decir, para *Mathematica* una matriz es una "lista de listas" donde cada sublista interna es una de las filas del arreglo bidimensional. Recapitulando, el doble corchete cuadrado con un 1 dentro (`[[1]]`) siempre se debe utilizar cuando la salida de un comando que produce una matriz en *Wolfram* es un arreglo rectangular y no una lista de listas.

Nota

Esta es la razón por la que en la instrucción `RelBinMatriz[Transpose[MR1], A, A]` del **In[ ]**, no se colocó el `[[1]]` pues `Transpose[MR1]` ofrece como salida la matriz transpuesta como una lista de listas y no como una estructura tradicional en filas y columnas. Cabe indicar que si se omite el uso de `[[1]]` donde se requirió en el código del **In[ ]**, la sentencia `RelBinMatriz` no es capaz de retornar la relación binaria respectiva.

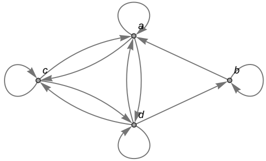
Solución del ejemplo 4.16

Finalmente, el digrafo asociado a la relación $R_1 o R_2$ se genera en el software así:

In[ ] :=

```
A = {a, b, c, d};
Composicion = RelBinMatriz[ProductoBooleano[MR2, MR1][[1]],
A, A];
GrafoRelBin[Composicion, A]
```

Out[ ] =



Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-83.zip

Explicación en video

https://youtu.be/FLyHvlme0rg

Tipos de relaciones

Prof. Enrique Vílchez Quesada

Universidad Nacional de Costa Rica

Definition (4.8)

Sea R una relación definida sobre un conjunto A, A distinto de vacío, entonces:

1. Se dice que R es reflexiva sí y solo sí $\forall a$, $a \in A$ se satisface aRa.
2. Se dice que R es simétrica sí y solo sí $\forall (a, b) \in R$ se cumple $(b, a) \in R$.
3. Se dice que R es antisimétrica sí y solo sí $\forall (a, b) \in R$, $a \neq b$ se tiene $(b, a) \notin R$.
4. Se dice que R es transitiva si $\forall (a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ se satisface $(a, c) \in R$.
5. Si R es una relación reflexiva, simétrica y transitiva se dice que R es una relación de equivalencia.
6. Si R es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva se dice que R es una relación de orden parcial.

Comentario sobre la definición 25

Los tipos de relaciones binarias enunciados en la definición 25 solamente son válidos cuando la relación a clasificar es homogénea ($A = B$). Si esa relación no es homogénea es inconsistente pensar en las propiedades reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.
La simetría y la antisimetría en una relación binaria, si el estudiante lo analiza, parecen ser características una la antítesis de la otra. De hecho, casi siempre si una relación es simétrica no cumplirá con el concepto de antisimetría y viceversa, si una relación es antisimétrica no satisfacerá la condición de la propiedad simétrica. Solamente existen dos excepciones a esta regla, la relación identidad y la relación vacía.
La relación identidad sobre un conjunto A es tal que aRb sí y solo sí $a = b$, por lo que consiste en un conjunto de pares ordenados donde en cada par, ambas componentes son iguales. La relación vacía es una relación binaria sin pares ordenados.

Comentario sobre la definición 25

La relación identidad y la relación vacía son las dos únicas relaciones binarias que cumplen con el hecho de ser tanto relaciones simétricas como antisimétricas y particularmente, la relación identidad es la única relación binaria de equivalencia y de orden parcial, de manera simultánea. En función de ello, si se tiene una relación R simétrica donde R no es la relación identidad y tampoco la relación vacía, se puede garantizar que R no será antisimétrica y recíprocamente, si se tiene una relación R antisimétrica distinta de la identidad y vacío, R no podrá ser una relación simétrica. Se aclara al alumno, eso sí, que existen relaciones binarias no simétricas y no antisimétricas, al mismo tiempo.
La definición 25 resulta ser exhaustiva en términos de procedimiento cuando el conjunto A contiene una cantidad significativa de elementos. A razón de ello, determinar por definición si una relación binaria es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva es una tarea no viable en muchas ocasiones.

- Un método más conveniente consiste en utilizar la representación matricial de la relación, verificando una serie de propiedades. El teorema siguiente explica cuáles son esas condiciones a comprobar.

Teorema 4.2

Theorem (4.2)

Sea R una relación sobre un conjunto finito no vacío A y M_R una matriz asociada que la representa, luego:

1. *R es reflexiva sí y solo sí M_R es una matriz donde la diagonal principal está formada por unos.*
2. *R es simétrica sí y solo sí $(M_R)^t = M_R$.*
3. *R es antisimétrica sí y solo sí para cada entrada (i, j) igual a uno de M_R con $i \neq j$, existe su opuesto binario simétricamente colocado con respecto a la diagonal principal, es decir, si hay un 1 como entrada en la posición (i, j), $i \neq j$, entonces en (j, i) de la matriz M_R debe haber un 0.*
4. *R es transitiva sí y solo sí $(M_R \odot M_R) \vee M_R = M_R$.*

Comentario sobre el teorema 26

Las propiedades establecidas en el teorema 26 posibilitan clasificar una relación binaria homogénea en reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva usando una matriz booleana que la representa. Hay una serie de observaciones esenciales sobre estas condiciones:

1. Cuando se habla de la diagonal principal de la matriz cuadrada M_R, esta diagonal está formada por todas las entradas ubicadas en las posiciones (i, i) (la fila igual que la columna), $1 \leq i \leq n$, n el tamaño del conjunto A. De allí que la diagonal principal de M_R toma la forma:

$$M_R = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

Si esta diagonal contiene al menos un 0 la relación binaria no es reflexiva.

Comentario sobre el teorema 26

2. Una relación es simétrica cuando su matriz de representación M_R es simétrica.
3. Una relación es antisimétrica cuando para todos los unos fuera de la diagonal principal de M_R el elemento simétricamente colocado con respecto a la diagonal principal es 0. Esta condición debe ser válida únicamente para los unos y no para los ceros, por lo que es factible encontrar en la matriz M_R dos parejas de ceros simétricamente colocados y la relación binaria, aún así, siempre tendría la posibilidad de ser antisimétrica.
4. Una relación es transitiva si al calcular $(M_R \odot M_R) \vee M_R$ el resultado es la matriz M_R. Si esta igualdad no se cumple se puede afirmar que la relación binaria no es transitiva.

Comentario sobre el teorema 26

El teorema 26 provee una serie de propiedades relativamente fáciles de programar en el lenguaje *Wolfram*. La función `ClasificacionRelBin` brindada como sigue, constituye una implementación al respecto:

In[ ] :=

```
ClasificacionRelBin[R_, A_]:=Module[{MR = MatrizRelBin[R, A, A][[1]], list}, list = Select[Position[MR, 1], #[[1]] != #[[2]] &]; {!MemberQ[Diagonal[MR], 0], Transpose[MR] == MR, Select[list, MemberQ[list, Reverse[#]] &] == {}, UnionBooleana[ProductoBooleano[MR, MR][[1]], MR][[1]] == MR}]
```

`MemberQ[Diagonal[MR], 0]` corrobora si la diagonal principal de `MR` contiene un 0. `Diagonal` es un comando de *Mathematica* que retorna la diagonal principal de una matriz cuadrada. `Position[MR, 1]` devuelve en una lista todas las posiciones (`{fila, columna}`) de los unos contenidos en la matriz booleana `MR`.

Comentario sobre el teorema 26

`list = Select[Position[MR, 1], #[[1]] != #[[2]] &]` selecciona las posiciones de los unos fuera de la diagonal principal y `Select[list, MemberQ[list, Reverse[#]] &]` verifica si el reverso `{j, i}` (`i` $\neq$ `j`) de la posición `{i, j}` donde hay un uno, está en el conjunto `list` de posiciones. Naturalmente si esto ocurre, la relación binaria tendría dos unos simétricamente colocados y por lo tanto, no podría ser antisimétrica. `Select` en su sintaxis recurre al # para hacer referencia a los elementos de la lista que recibe y & cierra las condiciones de selección.

El método `ClasificacionRelBin` compartido se utilizará en los ejemplos subsiguientes para clasificar relaciones binarias homogéneas. El estudiante debe observar que `ClasificacionRelBin` genera como salida un vector con cuatro componentes cuyo contenido es un valor lógico (True o False), correspondiente a si la relación estudiada es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva, respectivamente.

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-84.zip

Veamos algunos ejemplos.

Example (4.17)

Clasifique como reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia y de orden parcial, las relaciones binarias definidas sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dadas a continuación:

1. $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}$.
2. $R_2 = \{(1,3), (1,1), (3,1), (1,2), (3,3), (4,4)\}$.
3. $R_3 = \phi$.
4. $R_4 = \{(1,2), (1,3), (3,1), (1,1), (3,3), (3,2), (1,4), (4,2), (3,4)\}$.

Solución del ejemplo 4.17

En *Wolfram Mathematica* al usar el método `ClasificacionRelBin` se tiene:

In[ ] :=

```
A = Range[4];
Subscript[R,1] = {{1, 1}, {1, 2}, {2, 1}, {2, 2}, {3, 3},
{3, 4}, {4, 3}, {4, 4}};
Subscript[R,2] = {{1, 3}, {1, 1}, {3, 1}, {1, 2}, {3, 3},
{4, 4}};
Subscript[R,3] = {};
Subscript[R,4] = {{1, 2}, {1, 3}, {3, 1}, {1, 1}, {3, 3},
{3, 2}, {1, 4}, {4, 2}, {3, 4}};
Table[ClasificacionRelBin[Subscript[R, i], A], {i, 4}]
```

Solución del ejemplo 4.17

Se obtiene la siguiente salida:
Out[ ] $=$

{{True, True, False, True}, {False, False, False, False}, {False, True, True, True}, {False, False, False, True}}
Del **Out[ ]** se concluye que la relación R_1 es de equivalencia y no es antisimétrica, la relación R_2 no cumple ninguna de las propiedades, la relación R_3 es simétrica, antisimétrica y transitiva y, la relación R_4 solo es transitiva.

Nota

En la relación $R_3 = \phi$ se está verificando lo señalado en la página 169. La relación binaria R_3 es simétrica y antisimétrica, simultáneamente, al no existir un contraejemplo.

Solución del ejemplo 4.17

El paquete **VilCretas** cuenta con dos instrucciones interesantes que permiten clasificar relaciones binarias homogéneas, éstas son: `TipoRelacion` y `TipoMRelacion`.

`TipoRelacion` recibe una relación binaria y el conjunto A, devolviendo por definición si la relación es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia y de orden parcial. Si alguna de las propiedades es falsa, `TipoRelacion` muestra un contraejemplo.

`TipoMRelacion` es un comando similar a `TipoRelacion` en cuanto a clasificar una relación binaria homogénea pero empleando el procedimiento por matriz booleana del teorema 26. Si alguna de las condiciones del teorema resulta ser falsa, `TipoMRelacion`, también suministra un contraejemplo.

Solución del ejemplo 4.17

Para comprender el uso de `TipoRelacion`, se correrá la sentencia sobre R_4 :

In[ ] :=

```
TipoRelacion[Subscript[R, 4], A]
```

Out[ ] =

La relación no es reflexiva, un contraejemplo es: {2,2} no pertenece
La relación no es simétrica, un contraejemplo es: {1,2} está en la relación pero {2,1} no pertenece
La relación no es antisimétrica, un contraejemplo es: {1,3} y {3,1} están en la relación
La relación es transitiva
No se exhibe al lector el **Out[ ]** de `TipoMRelacion[Subscript[R, 4], A]` dada su cuantiosa extensión.

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-85.zip

Explicación en video

https://youtu.be/FNjTgnYMPSU

Explicación en video

https://youtu.be/NpA7R9BdNeE

Example (4.18)

Sea R la relación aRb sí y solo sí $a \equiv r \bmod 3$ y $b \equiv r \bmod 3$, con r un número entero no negativo y a, $b \in A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$. Demuestre que R es una relación de equivalencia.

Solución del ejemplo 4.18

La notación "$x \equiv y \bmod z$" se lee "x es congruente con y módulo z". Esto significa por definición de congruencia, que z divide a $x - y$. Las conguencias son muy utilizadas en teoría de números aunque para efectos de este texto no se entrará en mayores detalles.
En este ejemplo, $a \equiv r \bmod 3$ y $b \equiv r \bmod 3$ es equivalente a afirmar la divisibilidad de 3 con respecto a $a - r$ y a $b - r$. Luego, existen enteros m y m' donde $a = 3m + r$ y $b = 3m' + r$, por definición de divisibilidad. Esto significa que el residuo de las divisiones $a \div 3$ y $b \div 3$ da como resultado r, en ambos casos. Se concluye que a y b están relacionados por R, si a módulo 3 es igual a b módulo 3, a, $b \in A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$.

Solución del ejemplo 4.18

Tomando como base este razonamiento, la relación R se construye en *Mathematica* así:

In[ ] :=

```
A = Range[100];
R = RelBin["Mod[a,3]==Mod[b,3]", A, A];
```

El lector debe recordar lo señalado respecto a la ocupación del comando `Mod` en *Mathematica*. Éste corresponde a la operación de módulo. No se comparte con el alumno la salida arrojada por el software dado su significativo tamaño.

Solución del ejemplo 4.18

Se observa, por ejemplo, que cualquier matriz M_R que representa a la relación R es de dimensiones 100×100 igual a 10000 entradas. Si ahora, se recurre al uso del método `ClasificacionRelBin`, en el programa se recibe:

In[ ] :=

```
ClasificacionRelBin[R, A]
```

Out[ ] =

{True, True, False, True}

De donde, R es reflexiva, simétrica, no antisimétrica y transitiva, por lo que la relación es de equivalencia, según la definición 25.

Nota

La solución presentada en este ejemplo tiene sustento en un pensamiento computacional empleando la función `ClasificacionRelBin`. Esto califica como una demostración pues R es una relación finita y el ordenador está comprobando por nosotros las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva enunciadas en el teorema 26.

Solución del ejemplo 4.18

Se invita al estudiante a corroborar los resultados utilizando la sentencia `TipoMRelacion` de la librería **VilCretas**. No se sugiere el uso de `TipoRelacion` porque R contiene 3334 pares ordenados y esto ocasiona un tiempo de salida no favorable.

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-86.zip

Example (4.19)

Considere la relación binaria R del ejemplo 13. Pruebe que R es una relación de orden parcial.

Solución del ejemplo 4.19

En el ejemplo 13:

$$aRb \Leftrightarrow \log_b a \in \mathbb{N},\ a,\ b \in A = \{2, 4, \ldots, 100\}$$

R como un conjunto por extensión se determina con el comando `RelBin` y a razón de ello, las propiedades reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva se pueden analizar empleando el método `ClasificacionRelBin`:

In[ ] :=

```
A = Range[2, 100, 2];
R = RelBin["IntegerQ[Log[b,a]]", A, A];
ClasificacionRelBin[R, A]
```

Out[ ] =

{True, False, True, True}

Solución del ejemplo 4.19

Se infiere que R es reflexiva, no simétrica, antisimétrica y transitiva, por lo que de acuerdo con la definición 25, podemos afirmar que R es una relación de orden parcial. Como R es una relación finita, al usar `ClasificacionRelBin` se cataloga esta solución en la categoría de prueba y no de verificación.

Se sugiere al alumno emplear los comandos `TipoRelacion` y `TipoMRelacion` para comprobar que R es una relación de orden parcial. En este ejercicio, no hay problema con el tiempo de ejecución consumido por estas dos instrucciones, al tener R una cardinalidad igual a 60.

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-87.zip

Example (4.20)

Sea la relación $aRb \Leftrightarrow a \leq b$, a, $b \in A = \mathbb{N}$. Conjeture si R es una relación de orden parcial sobre el conjunto de los números naturales.

Solución del ejemplo 4.20

En analogía a las soluciones expuestas en los ejemplos 28 y 29, se utilizará la función `ClasificacionRelBin`. El siguiente código ejecuta 30 comprobaciones tomando al conjunto $A = \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq 30$:

In[ ] :=

```
Table[A = Range[n]; n -> Position[ClasificacionRelBin[
RelBin["a<=b", A, A], A], True], {n, 1, 30}]
```

Se obtiene la siguiente salida:

Solución del ejemplo 4.20

Out[ ] =

{1 -> {{1}, {2}, {3}, {4}}, 2 -> {{1}, {3}, {4}}, 3 -> {{1}, {3}, {4}},
4 -> {{1}, {3}, {4}}, 5 -> {{1}, {3}, {4}}, 6 -> {{1}, {3}, {4}},
7 -> {{1}, {3}, {4}}, 8 -> {{1}, {3}, {4}}, 9 -> {{1}, {3}, {4}},
10 -> {{1}, {3}, {4}}, 11 -> {{1}, {3}, {4}}, 12 -> {{1}, {3}, {4}},
13 -> {{1}, {3}, {4}}, 14 -> {{1}, {3}, {4}}, 15 -> {{1}, {3}, {4}},
16 -> {{1}, {3}, {4}}, 17 -> {{1}, {3}, {4}}, 18 -> {{1}, {3}, {4}},
19 -> {{1}, {3}, {4}}, 20 -> {{1}, {3}, {4}}, 21 -> {{1}, {3}, {4}},
22 -> {{1}, {3}, {4}}, 23 -> {{1}, {3}, {4}}, 24 -> {{1}, {3}, {4}},
25 -> {{1}, {3}, {4}}, 26 -> {{1}, {3}, {4}}, 27 -> {{1}, {3}, {4}},
28 -> {{1}, {3}, {4}}, 29 -> {{1}, {3}, {4}}, 30 -> {{1}, {3}, {4}}}

Solución del ejemplo 4.20

`Position` solicita a *Wolfram Mathematica* las posiciones de los True en cada salida de `ClasificacionRelBin`. Lo importante de este **Out[ ]** es apreciar que los valores True siempre están en las posiciones 1, 3 y 4 dentro del vector devuelto por `ClasificacionRelBin`, lo cual significa que la relación binaria $aRb \Leftrightarrow a \leq b$, a, $b \in A = \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq 30$, en cada caso es reflexiva, antisimétrica y transitiva, cumpliendo entonces con el concepto de relación de orden parcial.
El paquete **VilCretas** posee un comando booleano que determina si una relación finita es de orden parcial. La instrucción se llama `RelacionOrdenParcialQ`.

Solución del ejemplo 4.20

Esta sentencia recibe la relación binaria por extensión a analizar y el conjunto sobre el cual se define, retornando True si la relación es de orden parcial y False, si ocurre lo contrario. `RelacionOrdenParcialQ`, en este sentido, ofrece una forma alternativa para inferir lo solicitado en este ejemplo:

In[ ] :=

```
Table[A = Range[n]; RelacionOrdenParcialQ[RelBin["a<=b",
A, A], A], {n, 1, 30}]
```

Out[ ] =

{True, True}

Nota

A diferencia de los ejemplos 28 y 29, en este ejercicio la solución compartida nos conduce a concluir una conjetura, a saber: "R es una relación de orden parcial". Esta afirmación no puede ser interpretada como consecuencia de una demostración pues se ha derivado del análisis de algunos casos particulares. En este ejemplo es imposible encontrar por extensión todos los pares ordenados de la relación binaria R al ser infinita y esto provoca que al emplear el método `ClasificacionRelBin` dentro de `Table`, los resultados arrojados contemplen, únicamente, subconjuntos de la relación R. En general, las relaciones "$\leq$" y "$\geq$" son de orden parcial sobre el conjunto de los números reales.

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-88.zip

Explicación en video

https://youtu.be/ZvnzZj3vPr0

Relación de equivalencia sobre un conjunto

Una relación de equivalencia R sobre un conjunto A forma una partición de A. Como el estudiante recordará una partición es un conjunto de subconjuntos de A, donde sus intersecciones dos a dos son iguales a ϕ (no tienen nada en común) y su unión da como resultado A (forman el conjunto original).

Por ejemplo, si $A = \{1,2,3,4\}$, $P = \{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$ es una partición de A, pues: $\{1,2\} \cap \{3\} = \phi$, $\{1,2\} \cap \{4\} = \phi$, $\{3\} \cap \{4\} = \phi$ y $\{1,2\} \cup \{3\} \cup \{4\} = A$.
Si se tiene una relación de equivalencia R definida sobre un conjunto A, la partición implícita en la relación R, se construye por medio de una serie de subconjuntos denominados "clases de equivalencia".

Definición 4.9

Definition (4.9)

Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A, $A \neq \phi$. Al tomar un elemento $a \in A$ fijo, el conjunto de todos los $b \in A$ para los cuales aRb, denotado $[a]$, se llama clase de equivalencia de la relación, es decir:

$$[a] = \{b \in A \mid aRb\}$$

Comentario sobre la definición 31

Si dos elementos a y b se encuentran relacionados por R, siendo R una relación de equivalencia es comprobable por la definición 31, que sus clases de equivalencia son iguales.
El estudiante debe notar que el concepto de clase de equivalencia solo es aplicable sobre una relación binaria reflexiva, simétrica y transitiva, de lo contrario, resulta una inconsistencia pensar en este tipo de conjuntos.

Teorema 4.3

El teorema siguiente formaliza que el conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia de una relación de equivalencia R sobre A, determina una partición de A. Veamos.

Theorem (4.3)

Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A, $A \neq \phi$, entonces $P = \{[a] \mid a \in A\}$ es una partición de A.

Consideremos algunos ejemplos.

Example (4.21)

Si la relación binaria R sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ es tal que:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

Pruebe que R es una relación de equivalencia. Mediante la relación R encuentre una partición de A.

Solución del ejemplo 4.21

Un comando alternativo para probar si una relación finita y homogénea es de equivalencia se denomina `RelacionEquivalenciaQ`. La instrucción funciona de forma similar a `RelacionOrdenParcialQ`, pero para relaciones de equivalencia. En este ejemplo, R es una relación finita y homogénea en cuyo caso es factible el empleo de `RelacionEquivalenciaQ`:

In[ ] :=

```
A = Range[4];
R = {{1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 1}, {2, 2}, {2, 3},
{3, 1}, {3, 2}, {3, 3}, {4, 4}};
RelacionEquivalenciaQ[R, A]
```

Out[ ] =

True

Solución del ejemplo 4.21

El True indica que R es una relación de equivalencia. Si ahora se desean encontrar las clases de equivalencia para cada uno de los elementos de A, hay que iniciar observando cuáles elementos de A están relacionados con 1 :

$$R = \left\{ \boxed{(1,1)}, \boxed{(1,2)}, \boxed{(1,3)}, (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,4) \right\}$$

Se aprecia que la clase de equivalencia de 1 es un conjunto constituido por 1, 2 y 3, simbólicamente, $[1] = \{1,2,3\}$. Ahora, se toma el segundo elemento 2 de A, ¿cuáles valores de A están relacionados con 2 en R?:

$$R = \left\{ (1,1), (1,2), (1,3), \boxed{(2,1)}, \boxed{(2,2)}, \boxed{(2,3)}, (3,1), (3,2), (3,3), (4,4) \right\}$$

Solución del ejemplo 4.21

Es decir, $[2]=\{1,2,3\}$. Se considera el tercer elemento 3 del conjunto A y se extraen los pares ordenados relacionados con 3 :

$$R=\left\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),\boxed{(3,1)},\boxed{(3,2)},\boxed{(3,3)},(4,4)\right\}$$

Luego, $[3]=\{1,2,3\}$. La clases de equivalencia de 1, 2 y 3 son iguales por lo comentado en la página 202. Al estar relacionados los elementos 1, 2 y 3 en R, necesariamente $[1]=[2]=[3]$, al ser R una relación de equivalencia. En el cuarto elemento 4 de A se observa que:

$$R=\left\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),\boxed{(4,4)}\right\}$$

Solución del ejemplo 4.21

Por consiguiente, $[4] = \{4\}$. Al usar el teorema 32, una partición de A hallada por medio de la relación de equivalencia R, corresponde a:

$$P = \{[1], [2], [3], [4]\} = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$$

Eliminando de P los elementos repetidos.

Solución del ejemplo 4.21

En el paquete **VilCretas** se cuenta con una instrucción que determina las clases de equivalencia de una relación de equivalencia. Ésta se denomina `ClasesEquivalencia`. Al utilizarla en este ejemplo, se halla también, la partición solicitada:

In[ ] :=

```
ClasesEquivalencia[R, A]
```

Out[ ] =

$[1]=\{1,2,3\}$
$[2]=\{1,2,3\}$
$[3]=\{1,2,3\}$
$[4]=\{4\}$

El conjunto de clases de equivalencia distintas es: $\{\{1,2,3\}, \{4\}\}$

Solución del ejemplo 4.21

Asimismo, en la librería **VilCretas**, el comando `ParticionReEquivalencia` devuelve directamente la partición determinada por una relación de equivalencia. Veamos lo retornado para este ejercicio:

In[ ] :=

```
ParticionReEquivalencia[R, A]
```

Out[ ] =

$\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-89.zip

Explicación en video

https://youtu.be/77Mg_LydmMU

Comandos ClasesEquivalencia y PartitionReEquivalencia

Explicación en video

https://youtu.be/IgJe6xbi0ok

Explicación en video

https://youtu.be/70aVvlI4Kjk

Example (4.22)

Sea dada la relación $aRb \Leftrightarrow a$ y b son números palíndromos, a, $b \in A$, con:

$$A = \{101, 252, 313, 404, 575, 646, 717, 898, 939, 1111, 1551, 2442, 10301, 10501, 10601, 11311, 14941, 34443, 71617, 1234321\}$$

Demuestre que R es una relación de equivalencia. Halle una partición del conjunto A a través de la relación binaria R.

Solución del ejemplo 4.22

El conjunto A tiene cardinalidad igual a 20, razón por la cual, no se hace viable analizarlo sin el uso de software. Se empleará un camino de resolución similar a lo establecido en el ejemplo 33, recurriendo a los comandos `RelacionEquivalenciaQ` y `ClasesEquivalencia`:

In[ ] :=

```
A = {101, 252, 313, 404, 575, 646, 717, 898, 939, 1111,
1551, 2442, 10301, 10501, 10601, 11311, 14941, 34443,
71617, 1234321};
R = RelBin["PalindromeQ[a]&&PalindromeQ[b]", A, A];
RelacionEquivalenciaQ[R, A]
```

Out[ ] =

True

Solución del ejemplo 4.22

Se demuestra que la relación es de equivalencia por el valor lógico True y al ser R finita. La sentencia `PalindromeQ` es propia del software *Mathematica*. Si su argumento es un palíndromo (se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda) referido a una lista, un número entero o un "string", devuelve como salida un True, o bien, False, en caso contrario. Si ahora, se quieren encontrar las clases de equivalencia de R :

In[ ] :=

```
ClasesEquivalencia[R, A]
```

Solución del ejemplo 4.22

Se obtiene la siguiente salida:

Out[ ] =

[101]={101,252,313,404,575,646,717,898,939,1111,1551,
2442,10301,10501,10601,11311,14941,34443,71617,1234321}
[252]={101,252,313,404,575,646,717,898,939,1111,1551,
2442,10301,10501,10601,11311,14941,34443,71617,1234321}
⋮
[1234321]={101,252,313,404,575,646,717,898,939,1111,1551,
2442,10301,10501,10601,11311,14941,34443,71617,1234321}
El conjunto de clases de equivalencia distintas es:
{{101,252,313,404,575,646,717,898,939,1111,1551,2442,
10301,10501,10601,11311,14941,34443,71617,1234321}}

Solución del ejemplo 4.22

No se muestra el **Out[ ]** completo, por su característica repetitiva y su tamaño. A razón de la salida, se concluye que la partición P buscada es:

$$P = \{\{101, 252, 313, 404, 575, 646, 717, 898, 939, 1111, 1551, 2442, 10301, 10501, 10601, 11311, 14941, 34443, 71617, 1234321\}\}$$

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-90.zip

Teorema 4.4

Otra propiedad fundamental vinculada con las relaciones de equivalencia, reside en el recíproco del teorema 32.

Theorem (4.4)

Dada una partición P sobre un conjunto A, $A \neq \phi$, la relación aRb sí y solo sí a y b se encuentran en el mismo elemento de P es una relación de equivalencia.

Comentario sobre el teorema 35

Los pares ordenados (a, b) de una relación de equivalencia R vinculada con una partición P de un conjunto A, $A \neq \phi$, se determinan según el teorema 35, revisando si a y b están en el mismo subconjunto de la partición, esto quiere decir, que para hallar los pares (a, b) de R, se calcula $B \times B$ para todo B, B un elemento de la partición P.
Abordaremos algunos ejemplos de aplicación del teorema 35.

Example (4.23)

Determine todas las relaciones de equivalencia posibles sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.

Solución del ejemplo 4.23

La solución del ejemplo es plausible al encontrar todas las posibles particiones sobre el conjunto A. *Mathematica* posee un comando llamado `SetPartitions` que resuelve ese problema. Veamos:

In[ ] :=

```
<< Combinatorica`
A = Range[3];
SetPartitions[A]
```

Out[ ] =

$\{\{\{1, 2, 3\}\}, \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}\}$

Solución del ejemplo 4.23

Se observa en el código la apertura de un paquete denominado **Combinatorica**. Dentro de él, se localiza la instrucción `SetPartitions`. Este paquete, a diferencia de la librería **VilCretas**, no se instala en *Wolfram Mathematica* pues ya forma parte del software. La salida permite inferir 5 particiones sobre A, a saber:

$$\begin{array}{l} P_1 = \{\{1,2,3\}\} \\ P_2 = \{\{1\},\{2,3\}\} \\ P_3 = \{\{1,2\},\{3\}\} \\ P_4 = \{\{1,3\},\{2\}\} \\ P_5 = \{\{1\},\{2\},\{3\}\} \end{array}$$

Solución del ejemplo 4.23

Por el teorema 35, cada una de estas particiones determina una relación de equivalencia distinta sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$. Al seleccionar $P_1 = \{\{1, 2, 3\}\}$, la relación de equivalencia R_1 asociada a P_1 es:

$$R_1 = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$$
$$\Rightarrow R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Si se toma $P_2 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$, la relación de equivalencia R_2 vinculada a P_2, corresponde a:

$$R_2 = \{1\} \times \{1\} \cup \{2, 3\} \times \{2, 3\}$$
$$\Rightarrow R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

Solución del ejemplo 4.23

En $P_3 = \{\{1,2\},\{3\}\}$, la relación de equivalencia R_3 asociada es:

$$R_3 = \{1,2\} \times \{1,2\} \cup \{3\} \times \{3\}$$
$$\Rightarrow R_3 = \{(1,1)\,,(1,2)\,,(2,1)\,,(2,2)\,,(3,3)\}$$

Si se considera ahora la partición $P_4 = \{\{1,3\},\{2\}\}$, se concluye que R_4 es:

$$R_4 = \{1,3\} \times \{1,3\} \cup \{2\} \times \{2\}$$
$$\Rightarrow R_4 = \{(1,1)\,,(1,3)\,,(3,1)\,,(3,3)\,,(2,2)\}$$

Finalmente, al tomar $P_5 = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, la relación de equivalencia R_5 implícita en P_5, corresponde a la relación identidad:

$$R_5 = \{1\} \times \{1\} \cup \{2\} \times \{2\} \cup \{3\} \times \{3\}$$
$$\Rightarrow R_5 = \{(1,1)\,,(2,2)\,,(3,3)\}$$

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-91.zip

Example (4.24)

Si $A = \{a, 5, -20, b\}$ use *Wolfram Mathematica* para generar todas las relaciones de equivalencia existentes sobre el conjunto A.

Solución del ejemplo 4.24

La librería **VilCretas** facilita la sentencia `ReEquivalenciaParticion` donde al recibir una partición sobre un conjunto no vacío y el conjunto respectivo, retorna la relación de equivalencia determinada por la partición, según el teorema 35. Este comando será de utilidad en la propuesta de solución del presente ejemplo. El objetivo consiste en construir todas las particiones sobre $A = \{a, 5, -20, b\}$ tomando como base la sentencia `SetPartitions` y posteriormente, pasando cada una de ellas como argumento de `ReEquivalenciaParticion`. Veamos:

In[ ] :=

```
<< VilCretas`
<< Combinatorica`
A = {a, 5, -20, b};
Particiones = SetPartitions[A];
Table[i -> ReEquivalenciaParticion[Particiones[[i]], A],
{i, Length[Particiones]}]
```

Solución del ejemplo 4.24

Se obtiene la siguiente salida:

Out[ ] =

{1 -> {{-20, -20}, {-20, 5}, {-20, a}, {-20, b}, {5, -20}, {5, 5}, {5, a}, {5, b}, {a, -20}, {a, 5}, {a, a}, {a, b}, {b, -20}, {b, 5}, {b, a}, {b, b}},
2 -> {{-20, -20}, {-20, 5}, {-20, b}, {5, -20}, {5, 5}, {5, b}, {a, a}, {b, -20}, {b, 5}, {b, b}},
3 -> {{-20, -20}, {-20, b}, {5, 5}, {5, a}, {a, 5}, {a, a}, {b, -20}, {b, b}},
4 -> {{-20, -20}, {-20, a}, {-20, b}, {5, 5}, {a, -20}, {a, a}, {a, b}, {b, -20}, {b, a}, {b, b}},
5 -> {{-20, -20}, {-20, 5}, {-20, a}, {5, -20}, {5, 5}, {5, a}, {a, -20}, {a, 5}, {a, a}, {b, b}},
⋮

Solución del ejemplo 4.24

⋮

6 -> {{-20, -20}, {-20, 5}, {5, -20}, {5, 5}, {a, a}, {a, b}, {b, a}, {b, b}},
7 -> {{-20, -20}, {5, 5}, {5, a}, {5, b}, {a, 5}, {a, a}, {a, b}, {b, 5}, {b, a}, {b, b}},
8 -> {{-20, -20}, {-20, a}, {5, 5}, {5, b}, {a, -20}, {a, a}, {b, 5}, {b, b}},
9 -> {{-20, -20}, {-20, b}, {5, 5}, {a, a}, {b, -20}, {b, b}},
10 -> {{-20, -20}, {-20, 5}, {5, -20}, {5, 5}, {a, a}, {b, b}},
11 -> {{-20, -20}, {5, 5}, {5, b}, {a, a}, {b, 5}, {b, b}},
12 -> {{-20, -20}, {5, 5}, {5, a}, {a, 5}, {a, a}, {b, b}},

⋮

Solución del ejemplo 4.24

⋮

13 -> {{-20, -20}, {-20, a}, {5, 5}, {a, -20}, {a, a}, {b, b}},
14 -> {{-20, -20}, {5, 5}, {a, a}, {a, b}, {b, a}, {b, b}},
15 -> {{-20, -20}, {5, 5}, {a, a}, {b, b}}}
En conclusión se han encontrado 15 relaciones de equivalencia distintas sobre $A = \{a, 5, -20, b\}$.

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-92.zip

Explicación en video

https://youtu.be/1Hld_rgappw

Example (4.25)

Halle el número de relaciones de equivalencia distintas a construir sobre el conjunto $A = \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq 10$. ¿Se puede encontrar una fórmula en *Wolfram Mathematica* que calcule el número de relaciones de equivalencia distintas, siendo n un número natural cualesquiera?

Solución del ejemplo 4.25

El número de relaciones de equivalencia distintas, usando el teorema 35, corresponde al número de particiones distintas sobre $A = \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq 10$. Luego, en el software:

In[ ] :=

```
<< VilCretas`
<< Combinatorica`
Table[A = Range[n]; Length[SetPartitions[A]], {n, 10}]
```

Out[ ] =

{1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975}

Solución del ejemplo 4.25

La cantidad de relaciones de equivalencia distintas sobre A, se observa, crece con bastante rapidez. A esta sucesión númerica $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se le conoce con el nombre de sucesión de números de *Bell*, en honor al matemático y escritor escocés *Eric Temple Bell*.
Si tenemos en el **Out[ ]** anterior, algunos de los elementos de la sucesión de *Bell*, podría resultar tentador al alumno usar ese conjunto en el comando `FindRRHL` con la intención de buscar una fórmula que calcule los números de *Bell*. Sin embargo, la instrucción devuelve como salida NaD. *Wolfram* en esta misma dirección, facilita el comando `FindSequenceFunction`, capaz de encontrar muchas veces, una fórmula para un conjunto numérico recibido.

Solución del ejemplo 4.25

Si se recurre a su empleo, se tiene:

In[ ] :=

```
FindSequenceFunction[{1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140,
21147, 115975}, n]
```

Out[ ] =

BellB[n]

La `n` al final de `FindSequenceFunction` especifica la variable de la fórmula que se desea hallar. `BellB[n]` es una instrucción del software *Mathematica* cuyo cálculo es el $n-$ésimo número de *Bell*. El software no nos ha permitido identificar una fórmula explícita para la cantidad de relaciones de equivalencia distintas sobre $A = \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, sin embargo, nos está brindando un mecanismo de cálculo usando la función `BellB[n]`.

Nota

En la literatura una relación de recurrencia que encuentra los números de *Bell* o la cantidad de relaciones de equivalencia distintas sobre un conjunto con n elementos, viene dada por:

$$B_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B_i \text{ con } B_0 = B_1 = 1 \tag{7}$$

Siendo:

$$\binom{n-1}{i} = \frac{(n-1)!}{(n-1-i)! \cdot i!}$$

Este tipo de coeficiente numérico se llama "coeficiente binomial" y el comando `Binomial` de *Wolfram* facilita su cómputo.

Solución del ejemplo 4.25

Se insta al estudiante a comprobar que a través de la relación de recurrencia 7, se obtienen los números de *Bell*.

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/File-93.zip

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Cuadernos/Relaciones.pdf.rar

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/Quiz_relaciones.rar

Abra un sitio web

https://www.symbaloo.com/mix/vilcretasrelaciones

¡Recuerde resolver los ejercicios asignados!

Descargue un archivo

https://www.escinf.una.ac.cr/discretas/Archivos/Relaciones/Exercises.zip

enrique.vilchez.quesada@una.cr
http://www.escinf.una.ac.cr/discretas